Mémoire professionnel

Master of Arts/of Science en didactique disciplinaire

Étude d'une séquence sur l'introduction au calcul littéral à l'aide de problèmes de généralisation et de preuves en 9e Harmos.

Rédigé par

SLIM Amine (P43914)

Directrice de mémoire

Sylvie Coppé

Membres du jury

Yana Lacek

Julia Pilet

Jana Trgalova

Soutenance

28 juin 2023

Remerciements

Je serais profondément et éternellement reconnaissant envers Sylvie Coppé pour son engagement dans la direction de ce mémoire. Son soutien constant empreint de bienveillance et la richesse de son point de vue, en tant que directrice de mémoire, mais également en tant que maitresse d'enseignement en didactique durant mon master, ont été d'une valeur inestimable pour ma réflexion en cours.

Ma gratitude s'étend également à tous les élèves et collègues qui ont contribué de près ou de loin à cette recherche, car ils en sont la raison d'être. Leur participation active a enrichi mes idées et a permis d'approfondir les résultats obtenus.

J'aimerais également exprimer ma sincère reconnaissance envers Yana Lacek, Julia Pilet et Jana Trgalova, pour avoir généreusement accepté de juger ce mémoire.

Je remercie toutes les équipes du 2CR2D, et plus particulièrement Fiona Moreno pour son soutien aux étudiants.

J'exprime ma gratitude envers Maud Chanudet et Stéphane Favier pour avoir rendu mon stage de recherche plus flexible, facilitant ainsi l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, je souhaite adresser mes remerciements à mon entourage, en particulier à ma mère pour ses pensées bienveillantes et à mon épouse Valérie, pour son soutien indéfectible et ses encouragements tout au long de l'élaboration de ce mémoire. Sa présence et son soutien constant ont été une source de motivation incommensurable.

Table des matières

Introduction

L'algèbre est enseignée pour la première fois aux élèves âgés de 12 à 13 ans, lorsqu'ils entrent en 9e harmos[1] du cursus scolaire obligatoire du canton de Vaud. Enseignant exclusivement les mathématiques, dans un établissement vaudois, au cycle 3[2], nous avons remarqué que l'enseignement de l'algèbre peut poser des difficultés aux élèves, surtout dans un contexte où l'accent est mis sur le formalisme plutôt que sur la compréhension et la signification des concepts mathématiques. Dans le canton de Vaud, l'enseignement de l'algèbre est généralement marqué par cette réalité : les élèves commencent par apprendre les expressions algébriques en tant que concepts abstraits, puis les manipulations formelles. Souvent, l'application concrète ou la compréhension de l'utilisation de ces objets pour résoudre des problèmes sont repoussées à une étape ultérieure de l'apprentissage, dans le meilleur des cas. Or de nombreuses recherches ont abordé les difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre, comme ceux sur la rupture entre les raisonnements arithmétique et algébrique (Oliveira et al., 2019), la mobilisation de nouveaux objets abstraits, le jeu de changement de registres sémiotique (Nigon & Coppé, 2014). Elles constituent autant de raisons qui entrainent la faible mobilisation de l'algèbre par les élèves dans différents pays (Chevallard, 1985; Coulange, 2019; Vlassis et al., 2017). Lors d'un stage de formation à l'Université de Genève, nous nous sommes donc intéressés à cette problématique qui découle de l'utilité et de la finalité de l'usage de l'algèbre au cycle 3. L'objet de ce mémoire est né du fait de l'élaboration et de l'expérimentation d'une séquence d'enseignement lors de notre stage. Cette séquence visait à amener les élèves à chercher et à argumenter pour donner du sens aux concepts enseignés, tout en montrant la nécessité de l'outil algébrique. Dans ce mémoire nous analysons finement les productions d'élèves. Les défis rencontrés par les élèves au cours de cette séquence ont contribué à la genèse de notre travail de recherche. Après avoir rappelé quelques références historiques, les perspectives d'entrées dans l'algèbre, et également le cadre institutionnel de l'enseignement de l'algèbre dans le Canton de Vaud, nous présenterons la séquence composée de 3 groupes de séances, puis indiquerons la méthodologie d'analyse utilisée pour étudier les différentes séances, qui portent respectivement sur des exercices de calcul réfléchi, des problèmes pour généraliser et des problèmes pour prouver. Cette étude vise donc à analyser les réalisations des élèves de 9e lors

[1] Harmos : Harmonisation de la scolarité obligatoire signée par l'ensemble des cantons romands en 2009
[2] Le cycle 3 de l'enseignement obligatoire est constitué des trois dernières années de scolarité obligatoire (9e, 10e et 11e années).

de l'expérimentation de problèmes de généralisation et de preuve afin de justifier de l'introduction du langage algébrique. Notre hypothèse est qu'en procédant ainsi, les élèves prendront conscience de la nécessité de l'acquisition de l'outil symbolique manquant en tant qu'outil pour généraliser et prouver.

1. Éléments théoriques sur l'algèbre

Ce chapitre sera une introduction à l'étude de l'algèbre, en présentant à la fois son histoire, sa praxéologie, ses éléments symboliques, mais aussi les difficultés et les enjeux de son enseignement. Nous espérons ainsi dégager les fondements théoriques nécessaires à la compréhension des chapitres suivants, qui exploreront plus en détail les différentes approches pédagogiques possibles pour enseigner l'algèbre de manière significative.

1.1 Épistémologie de l'algèbre

Au mot « algèbre » est associée une pratique des mathématiques vieille de plus de quatre mille ans. Il nous semblait donc nécessaire de réaliser, dans le cadre de cette recherche en didactique des mathématiques, une brève analyse épistémologique afin de situer la nature et les origines de l'algèbre et des savoirs qu'elle représente. En effet, comme le précise Dorier (Bardini, 2006) :

> « (…) une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné ». (Dorier, 1997, p. 7)

1.1.1 Origine de l'algèbre

La question du commencement de l'algèbre a alimenté de nombreux travaux (Farès, 2017). Nous retiendrons ceux de Rashed (2007) pour lequel l'acte de naissance de « l'algèbre » se situe autour de la première moitié du IX^{e} siècle à Bagdad. Le terme « algèbre » est un dérivé du latin « Algebræ » traduction du mot arabe *al-jabr*. Le mathématicien perse Muhammad Ibn Mûssa Al-Khwârizmî (780-850) y fait mention dans l'ouvrage « *kitāb al-jabr wa al-muqābala* » rédigé entre 813 et 833, que l'on pourrait traduire par « *Le livre sur le calcul par la restauration et la comparaison* ». Comme le rappel Hassayoune et al (2015), les termes *al-jabr* et *al muqabala* désignent des méthodes de résolutions d'équations :

- le terme *« al-jabr »*, qui signifie en médecine « réparation ou restauration d'une rupture » (Rahim & Hassayoune, 2015), désigne en mathématique la transformation qui permet de « restaurer » l'équation en supprimant les soustractions ou de nos jours la transformation d'une équation par ajout d'un terme ;

2x – 7 = 5 ⇔ 2x – 7 + 7 = 5 + 7 ⇔ 2x = 12

- « *al-muqâbala* » signifie la réduction de termes de même degré dans une équation :

  7x = 5x +7 ⇔ 2x = 7.

L'ouvrage d'Al-Khwârizmî est consacré à la résolution de problèmes numériques et géométriques de la vie quotidienne (partage d'héritages, arpentage[3], construction de canaux d'irrigation, échanges commerciaux…) ramenés à des équations du 1^{ier} et du 2^{d} degré à une inconnue. Il innove en rendant ainsi la résolution de problèmes indépendante des problèmes eux-mêmes. En introduisant les concepts d'inconnues, de polynômes et d'équations (classement, forme canonique…) comme des objets mathématiques à part entière et accompagnés des lois qui leur sont associés, Al-Khwârizmî a contribué de manière très significative au développement de l'algèbre. Pour autant, longtemps avant les travaux d'al-Khwarizmi, les vestiges et ouvrages (tablettes babyloniennes, Livre II des éléments d'Euclide, Les Arithmétiques de Diophante…) des civilisations antérieures à celles d'Al-Khwârizmî faisaient déjà mention de processus de résolution se ramenant à des équations.

1.1.2 Histoire de l'algèbre au travers de sa praxéologie

Afin de résumer son développement historique, nous nous sommes inspirés de l'étude diachronique des praxéologies algébriques d'Hassayoune (2015), complétée des travaux de Serfati (2005) sur l'évolution de l'écriture algébrique et des éléments historiques de la constitution de l'algèbre classique de Dahan-Dalmedico et al (1986). Tous ces éléments que nous avons choisis sont représentés à l'aide du tableau ci-dessous :

<table>
<tr><th>Lieu</th><th>Époque</th><th>Stade d'évolution de la praxéologie algébrique</th><th>Stade d'évolution de l'écriture algébrique</th></tr>
<tr><td>La Mésopotamie (Période paléobabylonienne)</td><td>XXe siècle Av. J.C.</td><td>Pré-algèbre algorithmique :
Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.</td><td rowspan="3">Stade de l'algèbre rhétorique
L'algèbre est exclusivement exprimée à l'aide du langage ordinaire :

« J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré : 14'30. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30'). Tu croiseras 30' et 30' : 15'. Tu ajouteras à 14'30 : 14'30°15'. C'est le carré de 29°30'. Tu ajouteras le 30' que tu as croisé à 29°30' : 30 le côté du carré. »(Guichard, 2000)

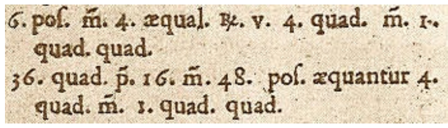
<u>Aucun symbole n'existe pour représenter des inconnues !</u></td></tr>
<tr><td>L'Égypte</td><td>XVIIIe siècle Av. J.C.</td><td>Pré-algèbre algorithmique :
Algorithmes de calcul, procédures de résolution d'équations linéaires et d'équations quadratiques simples.</td></tr>
<tr><td>La Grèce antique : Les Éléments d'Euclide, Livre II</td><td>IIIe Av. J.C</td><td>Pré-algèbre géométrique :
Calcul de grandeurs géométriques (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations).</td></tr>
</table>

[3] Arpentage : processus de mesure et de délimitation des terres, des propriétés et des limites

<table>
<tr><td></td><td></td><td>Rigueur dans les processus d'argumentation.</td><td></td></tr>
<tr><td>Diophante d'Alexandrie</td><td>IIIe siècle Ap. J.C.</td><td>Arithmétique présymbolique :
Méthode de l'inconnue opérationnelle (l'arithme).</td><td rowspan="6">Stade de l'algèbre syncopée (Algèbre numéreuse)

La solution est exprimée de façon rhétorique, malgré un haut niveau de technicité du calcul algébrique.

Cependant, elle mentionne de façon explicite un “nombre qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités”, noté ς” (Diophante).

L'usage de lettre se limitera à la représentation des grandeurs inconnues.


Extrait de l'Ars Magna (Cardan, 1663)</td></tr>
<tr><td>Al-Khwârizmî</td><td>780-850</td><td>Algèbre des équations :
Procédés d'al-jabr et al-muqâbala.
Algorithmes de résolution justifiés géométriquement.</td></tr>
<tr><td>Abù Kâmil
Al-Karâjî
Al-Khâyyâm</td><td>850-930
953-1029
1050-1123</td><td>Arithmétisation de l'algèbre
Généralisation des opérations arithmétiques aux monômes et aux polynômes.</td></tr>
<tr><td>Sharaf al-Din al tusi</td><td>1135-1213</td><td>Résolution numérique et méthodes d'approximation
Ébauche de l'étude des courbes, recherche de maximum, expression de la dérivée première des polynômes</td></tr>
<tr><td>Scipione del Ferro
Tartaglia
Cardan</td><td>1456-1526
1499-1577
1501-1576</td><td>Résolution d'équations polynomiales de degré 3</td></tr>
<tr><td>Bombelli</td><td>1526-1572</td><td>Résolution des équations de degré 3 irréductibles
Prise en compte des racines carrées d'un négatif.</td></tr>
<tr><td>Viète</td><td>1540-1603</td><td>Algèbre littérale (spécieuse) :
Calcul algébrique abstrait.
Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique (analyse/synthèse).
Traitement des problèmes du 2^d, du 3^e et de degré supérieur.</td><td rowspan="4">Stade de l'algèbre symbolique « classique »

Les lettres désignent non seulement les grandeurs inconnues, mais également les grandeurs connues non déterminées.

Apparition du calcul littéral.</td></tr>
<tr><td>Descartes</td><td>1596-1650</td><td>Algébrisation de la Géométrie</td></tr>
<tr><td>Fermat</td><td>1601-1665</td><td>Algébrisation de la théorie des nombres</td></tr>
<tr><td>Vandermonde
Lagrange
Cauchy
Gauss
Abel</td><td>1735-1796
1736-1813
1789-1857
1777-1855
1802-1829</td><td>L'analyse algébrique</td></tr>
<tr><td>Riemann
Hasse
Dedekind
Hilbert
Noether</td><td>1826-1866
1898-1979
1831-1916
1862-1943
1882-1935</td><td>Théorie des structures
Naissance de l'algèbre moderne, celle des groupes, anneaux, corps, matrices, espaces vectoriels…</td><td>Stade de l'algèbre symbolique « abstraite »
Les symboles représentent des objets abstraits qui ont une relation et interagissent les uns avec les autres.</td></tr>
</table>

Tableau 1 - Développement historique de l'algèbre

Ainsi, selon les travaux précédemment cités, l'étude historique de l'algèbre met en évidence plusieurs points d'attentions :

- Il existe une transition entre les pratiques arithmétiques et algébriques (De Diophante à Al-Khwârizmî) ;
- La résolution de problème évolue du spécifique au général ;

- L’évolution de l’écriture algébrique fait apparaitre 3 stades importants ;
    - Le stade de l’algèbre rhétorique,
    - Le stade de l’algèbre syncopée,
    - Le stade de l’algèbre symbolique.

Enfin, au regard des immenses progrès réalisés depuis l’introduction de l’algèbre symbolique, c’est bien à partir des travaux de Viète que l’algèbre a rayonné sur le développement des mathématiques.

1.1.3 Le symbolisme algébrique

Les praxéologies algébriques du XVI^e siècle, dont particulièrement celles de Cardan (ouvrage rédigé en latin) et de Descartes (ouvrage rédigé en français), symbolisent le chemin parcouru entre l’algèbre syncopée et l’algèbre symbolique, cette dernière représentant, à quelques détails près, le calcul littéral d’aujourd’hui.

Le mérite de cette transition relève des travaux de Viète au travers de sa principale œuvre rédigée en latin, « *Introduction à l’art analytique ou algèbre nouvelle* » (1591) qui se révèlera être d’une remarquable modernité :

> "Diophante a employé la zététique plus ingénieusement que tout autre auteur dans les livres qu’il a écrits sur l’Arithmétique. Cependant, il l’a représentée établie par des nombres et non par des espèces, dont cependant il a fait usage, ce qui doit faire admirer davantage sa subtilité et son talent, car les choses qui paraissent plus difficiles et abstruses à celui qui emploie la Logistique numérale sont familières et immédiatement claires à celui qui emploie l’arithmétique spécieuse." (Guichard, 2000; Viète, 1868, p. 31).

Les progrès de Viète reposent sur la création d’un calcul portant uniquement sur des lettres, des lettres pour désigner les inconnues, les puissances des inconnues, mais également et surtout pour désigner les coefficients des inconnues et toutes autres données :

> "Afin que cette méthode (la mise en équation) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, 0, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par toute autre consonne." (Guichard, 2000; Viète, 1868, p. 28).

En cela, l’algèbre change de paradigme, elle qui oscillait entre l’arithmétique et la géométrie, va basculer de l’étude d’équations particulières à l’étude de type généraux d’expressions et d’équations. L’algèbre devient ainsi un outil puissant pour obtenir des formules générales en lien avec des familles entières de situations et pour prouver des règles dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires, etc.) (Rahim & Hassayoune, 2015). En somme, l’évolution de l’histoire de l’algèbre au travers de sa praxéologie est marquée par un passage d’une approche empirique et spécifique à une approche plus abstraite, formelle et générale, avec l’introduction de notations symboliques sophistiquées et de méthodes algébriques plus avancées pour résoudre divers types d’équations et de problèmes mathématiques. Son enseignement a logiquement suivi la même évolution et est devenu plus axé sur la manipulation symbolique, la compréhension des règles algébriques et la résolution de problèmes généraux. Cela a permis une approche plus formelle et abstraite de l’algèbre ainsi que l’apparition de difficultés inerrantes.

1.2 L’Enseignement de l’algèbre

Nous allons nous intéresser à l’apprentissage de l’algèbre, et plus particulièrement à l’entrée dans l’algèbre, référence aux premières expériences que les élèves ont avec les nouveaux objets abstraits et plus particulièrement la lettre.

1.2.1 Les difficultés d’entrer dans l’algèbre

De nombreuses recherches, menées en France, ont indiqué que l’entrée dans l’algèbre est un « problème de la profession » (2015), au sens de Chevallard (2006). Cet état de fait est constaté depuis plus de 30 ans par la recherche (Arcavi et al., 1989; Coppé et al., 2016; Floris, 2014; Pilet, 2012). Les travaux de Coppé (2009; 2012) énumèrent au fil du temps quelques éléments d’explications :

- Le passage de la pratique arithmétique à la pratique algébrique met en jeu une première rupture d’ordre épistémologique en termes d’outils et d’objets au sens de Douady (1986) ;
- Le passage de la pratique arithmétique à la pratique algébrique met en jeu une seconde rupture d’ordre épistémologique en termes de fausse continuité et de discontinuité selon les travaux de Kieran (1992) ;
- Changements de paradigmes avec l’arithmétique :
    - Une variable peut représenter simultanément plusieurs nombres,
    - La lettre peut être choisie arbitrairement,
    - Absence de valeur positionnelle,

    - L’égalité comme relation d’équivalence,
    - Le signe de la multiplication est invisible,
    - Les règles de priorité et d’utilisation des parenthèses,
- Un émiettement de l’algèbre dans les programmes au profit des activités techniques (développer, réduire, ou factoriser) : résultante de la disparition de la dialectique entre l’arithmétique et l’algèbre (Assude et al., 2012).

Tous ces éléments d’explications renforcent la question du sens et sa déliquescence surtout si l’enseignement de l’algèbre se résume lors de son introduction à appliquer des techniques ne reposant pas sur la connaissance solide des technologies et théories associées. En complément des nombreux constats et éléments d’explication, la recherche a exposé plusieurs pistes afin de lever certaines difficultés liées à l’introduction de l’algèbre.

1.2.2 Les entrées possibles dans l’algèbre

Les travaux de Grugeon (1997), inspirés de ceux de Douady (1986), proposent une structuration de « l’algèbre en deux dimensions non indépendantes et non hiérarchisées, la dimension objet et la dimension outil ». Dans sa dimension « objet », le travail sur l’algèbre élémentaire consiste à manipuler les objets mathématiques que sont les expressions littérales, les équations, etc. L’algèbre est ainsi perçu comme une collection organisée d’objets possédant des représentation, des méthodes de manipulation et des propriétés spécifiques. Alors que dans sa dimension « outil », le travail sur l’algèbre élémentaire consiste à résoudre des problèmes de généralisation, de preuve, de mise en équation, etc. Afin de permettre un travail équitable selon les deux dimensions et permettre de donner du sens à la genèse des nouveaux objets mathématiques ainsi qu’aux techniques de calculs, Bednarz et al. (1996) ont énuméré quatre perspectives d’entrée dans l’algèbre :

- Une approche par la généralisation des modèles numériques et géométriques et des lois régissant les relations numériques (par la production de formules) ;
- Une approche par la résolution de problèmes (par les équations) ;
- Une approche par la modélisation de phénomènes physiques et mathématiques ;
- Une approche technologique / fonctionnelle (via des logiciels).

Ces différentes approches ne s’opposent pas et il existe un consensus au sein de la communauté scientifique soutenant l’idée d’un équilibre entre ces quatre perspectives nécessaire à la compréhension en profondeur de la « fonction, structure et fonctionnement » de la pratique de l’algèbre (Bednarz et al., 1996). Mais l’approche par généralisation s’est révélée être plus facilitatrice, dans l'entrée dans l'algèbre, que les autres approches selon de nombreuses recherches (Douek & Morselli, 2012; Larguier, 2015; Radford, 2014). En effet, le réel potentiel didactique de l'approche par généralisation n'avait pas été approché en 1996 (Bednarz et al., 1996), même si Radford (1996) pointait déjà un lien fort avec un autre processus, le processus de validation de la généralisation produite. Plus concrètement, la pratique d'une activité de généralisation permet de s'engager également dans celle de la preuve (ou de justification), levier qui donnerait également du sens à l'utilisation de la lettre (Larguier, 2015; Nigon & Coppé, 2014). Rappelons qu'une preuve est une explication (un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité) acceptée par une communauté donnée à un moment donné (Balacheff, 1987). Les travaux de Barallobres (2004) sur lesquels s'appuient Nigon & Coppé (Nigon & Coppé, 2014) montrent que la démarche de preuve, dans le cadre d'un enseignement introductif de l'algèbre, est un outil permettant la validation des propositions mathématiques, renforçant ainsi la dimension « outil » de l'algèbre. Ainsi, en utilisant des approches combinées de généralisation et de preuve, l'objectif serait de donner un sens clair aux concepts mathématiques, en particulier à la lettre, pour rendre l'apprentissage de l'algèbre plus accessible pour les élèves lors de sa présentation initiale. Dans ce contexte, nous allons interroger l'organisation de l'enseignement de l'algèbre en Suisse romande et mettre en avant les éventuelles intentions de ce curriculum quant aux approches de généralisation et de preuve.

1.2.3 Le Plan d'étude romand (PER)

Le PER découpe le domaine des mathématiques en 4 grands axes thématiques que sont « Espace », « Nombres », « Opérations » et « Grandeurs et mesures » auxquelles s'ajoute l'axe transversal « Modélisation ».Les intentions du PER quant à l'introduction à l'algèbre sont situées dans la thématique « Opération (Fonction et Algèbre) » et détaillées par la visée prioritaire MSN33 et ses neuf composantes dont la composante numéro cinq « Résoudre des problèmes numériques et algébriques en mobilisant l'algèbre comme outil de calcul (équations), de preuve ou de généralisation ». Notons qu'il est singulier d'avoir associé ainsi les termes « Fonction » et « Algèbre », car les fonctions sont des objets mathématiques quand l'algèbre est un domaine des mathématiques. Cela n'invite pas à concevoir les fonctions comme relevant également du domaine de l'algèbre. À la lecture de la composante numéro cinq, on peut aisément formuler que les intentions du PER sont congruentes avec les conclusions des travaux universitaires sur l'enseignement de l'algèbre, précédemment cités au paragraphe 1.2.2. Concrètement, le PER prend en considération l'approche par la généralisation et la preuve, permettant ainsi aux élèves d'identifier des modèles, des tendances et des relations entre les concepts et les propriétés algébriques. Les élèves sont théoriquement encouragés à formuler des conjectures, à les tester, à les vérifier à partir d'exemples et à les prouver.

1.2.4 Organisation de l'enseignement

Depuis 2011, l'école obligatoire, encadré par la loi sur l'enseignement obligatoire (LEO), se déroule en deux degrés : le degré primaire et le degré secondaire I. Le degré secondaire I, d'une durée de 3 ans, comporte deux voies, la voie pré-gymnasiale (VP) et la voie générale (VG). La voie pré-gymnasiale accueille les élèves qui pourront accéder directement aux études de maturité gymnasiale (équivalent du lycée général en France) et avoir accès à n'importe quelle université suisse. La voie générale (VG) accueille des élèves qui se destinent principalement aux écoles de culture générale et de commerce ou de maturité professionnelle (dans les domaines de la santé du travail social, de la pédagogie, etc.), ainsi qu'à la formation professionnelle (apprentissage). En VG, deux niveaux sont prévus en mathématiques, le « niveau 1 » correspondant aux exigences de base, tandis que le « niveau 2 » correspondant aux exigences supérieures mais inférieures à celles de la VP. Les mathématiques sont enseignées à différents niveaux, avec des objectifs d'apprentissage adaptés à chaque niveau. Afin de permettre l'opérationnalisation du PER pour chacun des niveaux, la direction pédagogique du canton de Vaud propose un découpage annuel des apprentissages.
Sur la base de 32 semaines de travail par an et à raison de cinq périodes[4] hebdomadaire, l'enseignement des mathématiques occupe 160 périodes sur l'année scolaire. Concernant l'enseignement de l'algèbre (calcul littéral, équations et hors étude des fonctions), le tableau ci-dessous résume la situation :

	9e	**10e**	**11e**
Nbre de période annuel (%) Filière VP	10 (6.25%)	40 (25%)	50 (31.25%)
Nbre de période annuel (%) Filière VG2	10 (6.25%)	35 (22%)	45 (28%)
Nbre de période annuel (%) Filière VG1	0 (0%)	10 (6.25%)	35 (22%)

Tableau 2 - Répartitions des périodes d'enseignement de l'algèbre au cycle 3

En plus de constater que l'enseignement de l'algèbre est différent selon les niveaux et les filières, nous observons une organisation didactique qui met l'accent sur l'étude de l'algèbre principalement en classe de 10e et 11e, avec une brève introduction en 9e. C'est à ce niveau que se situe notre étude. En nous focalisant sur la filière VP, en lien avec le contexte de notre étude, ce phénomène se précise selon un schéma en lien avec les autres chapitres. En effet, le tableau ci-dessous (Tab. 3) nous permet d'observer, sur les trois années du cycle 3, des mouvements

[4] Une période d'enseignement équivaut à 45 minutes

inverses entre l'étude des nombres réels et de l'algèbre (calcul littéral et équations) et une parfaite constance dans l'enseignement de la notion de fonction. Les autres chapitres bénéficiant d'une relative régularité sur les trois années du cycle 3.

	Périodes en 9e	Périodes en 10e	Périodes en 11e
Nombres et opérations	55	30	15
Algèbre	10	40	50
Figures planes	40	20	27.5
Grandeurs et mesures (inclus la trigonométrie)	15	27.5	27.5
Fonctions	20	20	20
Représentation des solides	10	7.5	5
Grandeurs et mesures sur les solides	10	15	15
Total :	160	160	160

Tableau 3 - Répartitions des périodes selon les chapitres au cycle 3

En outre, il convient de noter que l'algèbre est l'un des domaines qui bénéficie du moins d'heures d'enseignement, avec seulement 10 périodes allouées à son introduction 9e. En prenant en compte cette observation et en considérant que l'utilisation des MER est vivement recommandée, il est légitime de chercher à comprendre comment l'enseignement de l'algèbre est structuré en se basant sur l'organisation des MER, en tant que référentiel officiel d'exercices et répondre à deux questions spécifiques :

- Quelles sont les approches privilégiées par les MER pour l'enseignement de l'algèbre en 9e ?
- Y a-t-il une répartition équitable entre les exercices de dimension « objet » et « outils » en 9e ?

Le tableau ci-dessous (Tab. 4) présente une synthèse des contenus des MER concernant les types d'exercices portant sur l'algèbre. Il révèle que, dans leur ensemble, les MER semblent privilégier, tout au long du cycle 3, les approches qui impliquent la résolution d'équations et la notion de fonction, tandis que d'autres approches, notamment celles liées à la généralisation et à la preuve, sont mises de côté. Ce phénomène est exacerbé par le fait que ces approches sont absentes en 9e année et ne sont abordées qu'à la fin du cycle 3, c'est-à-dire en 11e année, et uniquement pour les élèves de la voie pré-gymnasiale (VP). En 9e, et conformément au découpage abordé précédemment (cf. Tableau 3), nous observons deux fois plus d'exercices sur les fonctions que sur le calcul littéral, et notamment pour entretenir un lien naturel avec les fonctions :

« En 9^{e}, on aborde le calcul littéral en travaillant essentiellement à partir de l'élaboration de formule (ce travail a été initialisé dans le chapitre Fonctions et diagrammes) et sur le premier savoir-faire (développer, réduire, factoriser). Une approche de la réduction d'expressions littérales est également mise en place. » (Commentaire Mer 9^{e} - Calcul littéral)

	9e	**10e**	**11e**
Nombre d'exercices NO	240	247	151
Nombre d'exercices FA	83	228	375
Nombre d'exercices sur le calcul littéral	26 sur 83	76 sur 228	73 sur 375
Nombre d'exercices sur la généralisation	1 sur 83	1 sur 228	6 sur 375
Nombre d'exercices sur la preuve	0 sur 83	1 sur 228	9 sur 375
Nombre d'exercices su sur les équations	0 sur 83	49 sur 228	139 sur 375
Nombre d'exercices sur les fonctions	57 sur 83	101 sur 228	148 sur 375

Tableau 4 - Nombre d'exercices par typologie et degré au cycle 3 (hors QSJ, FLP et RS)

Pour faciliter cette clarification, il est nécessaire de préciser certains points. De plus nous avons inclus en "Annexe 0" les quelques exercices que nous mentionnons :

- Nous distinguons les problèmes de généralisation des problèmes qui mènent à une expression fonctionnelle à partir des critères suivants (objectifs, type de questions posées et approche de résolution) ;
- Le FA6 Treillis (livre 9^{e} p.67) (Annexe 0) est le seul exercice que nous pourrions qualifier de problème de généralisation.
- Les activités du type FA7, FA10, FA11, FA12, etc., cherchent à décrire une relation mathématiques précise entre les variables.

Enfin, pour revenir au FA6, nous l'avons considéré comme un exercice de généralisation mais ,selon les considération didactique et méthodologique des MER, il est fortement recommander de mettre l'accent sur l'utilisation d'un tableau de valeur :

« FA6 Treillis offre la possibilité de travailler la recherche d'expressions fonctionnelles non triviales en renforçant l'intérêt d'établir un « tableau des valeurs. Le tableau de valeurs d'une fonction en est une représentation privilégiée pour l'élève qui débute dans ce domaine. Ce tableau permet de nombreuses comparaisons de couples, il laisse des choix et une autonomie à celui qui l'établit, il peut conduire à des généralisations et amener l'expression fonctionnelle »

Ce faisant, nous disposons de suffisamment d'éléments pour affirmer que les MER privilégient une approche centrée sur la relation entre les fonctions et le calcul littéral en 9^{e}. Ce constat soulève légitimement la question du type de travail proposé dans les MER de 9^{e} et l'éventuelle répartition équitable entre les exercices de dimension « objet » et « outils ». Pour le vérifier, nous avons classé selon leurs objectifs pédagogiques les 26 exercices (du FA58 au FA83, hors QSJ[5] et FLP[6]) y figurant :

Objectifs	**Exercices**	**Dimension**
Opérations arithmétiques	FA58, FA60, FA64	Objet
Traduire un texte par une expression arithmétique	FA59	Objet
Traduire un texte / une figure géométrique par une expression littérale et inversement	FA61, FA62, FA63, FA65, FA66, FA67, FA68, FA76, FA77, FA78, FA79, FA81	Objet
Exprimer le suivant, le multiple, etc. d'un nombre (aspect structurel)	FA61, FA62, FA66, FA78, FA82, FA83,	Objet
Calculer une expression littérale pour une valeur donnée :	FA69, FA70, FA71, FA76, FA79, FA80	Objet
Connaître, utiliser les règles et conventions usuelles d'écriture :	FA58, FA60, FA72, FA73, FA74, FA75	Objet

Tableau 5 - Les exercices selon leurs objectifs en 9e dans le chapitre « calcul littéral »

En 9^{e}, l'offre des MER met en avant le fait que l'algèbre est exclusivement travaillée dans sa dimension « objet ». Nous pouvons penser que l'enseignement de l'algèbre en 9^{e} se résume principalement à l'étude de la manipulation des expressions littérales et des techniques de calcul associées en dehors d'un contexte de résolution de problèmes, privilégiant ainsi un rapport institutionnel formel à l'algèbre (Chevallard, 1985, 1989; Pilet & Grugeon-Allys, 2021). Enfin, il convient également de remarquer qu'entre les chapitres FA Fonctions et Diagrammes et FA Calcul littéral, il y a un intervalle de quatre semaines et deux chapitres de géométrie. Cette séquence ne stimule pas les élèves à faire des liens entre les différents chapitres et concepts. Nous constatons donc que l'idée de réduire l'apprentissage de l'algèbre au moment de son introduction à l'application de techniques utilisant le symbolisme formel est encore d'actualité en Suisse romande malgré un consensus des travaux en didactique sur la pertinence d'aborder l'algèbre selon d'autres perspectives et contrairement au PER.

[5] QSJ : Que sais-je – Activité diagnostique
[6] FLP : Faire le point - Activité de synthèse

1.2.5 Conclusion de l'étude du PER et des MER

En 9e, les MER proposent des activités qui se concentrent sur la manipulation d'expressions littérales et de techniques de calcul, limitant ainsi l'enseignement de l'algèbre et pouvant entraver sa compréhension. Cette approche ne favorise pas le développement de la compréhension conceptuelle, de la pensée critique et de la résolution de problèmes, ce qui peut empêcher les élèves d'être des acteurs actifs de leur apprentissage (Coppé & Grugeon, 2009). De plus, cette méthode peut conduire à une mémorisation superficielle de formules et de procédures, sans réelle compréhension des concepts sous-jacents, ce qui limite la capacité des élèves à appliquer leurs connaissances dans de nouvelles situations mathématiques. En revanche, une approche globale de l'enseignement de l'algèbre, qui inclut à la fois les aspects formels et conceptuels, ainsi que l'expression et l'utilisation appropriée des concepts algébriques dans divers contextes mathématiques, peut être considérée comme plus significative que la précédente. Cette approche favorise une compréhension approfondie et connectée de l'algèbre, encourage le développement de la pensée critique et analytique pour résoudre des problèmes, et permet aux élèves de généraliser, de prouver et d'appliquer les concepts algébriques dans des contextes réels.

1.2.6 Problématique

En prenant en compte les constats précédents, et plus particulièrement la faible présence de problèmes de généralisation et de preuve durant tout le cycle 3 et leur absence en 9e, nous avons élaboré et expérimenté une séquence d'introduction à l'algèbre, dans une classe ordinaire de 9e VP d'un établissement du Canton de Vaud, comme une alternative possible aux pratiques en cours et en complément des activités proposées dans les MER, mais également dans la perspective d'alimenter la recherche en lien direct avec la formation des enseignants. Inspirés des travaux de recherches de l'unité d'enseignement et de recherche DiMaGe de l'Université de Genève sur la résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement ainsi que ceux du groupe SESAMES, nous avons construit une séquence reposant sur les caractéristiques suivantes :

- Nécessité de définir une organisation didactique de la séquence visant à donner une raison d'être aux expressions littérales (Coppé et al., 2016) ;
- Introduction de la lettre à l'aide de problèmes de généralisation et de preuves (Nigon & Coppé, 2014) par la production de formules ;
    - Utilisation de la situation du carré bordé comme situation de référence (Coppé et al., 2016b) ,

- o Utilisation des programmes de calculs (Alves et al., 2013) ,

- Nécessité de justifier les techniques de calcul littéral à l'aide de technologies mathématiques (ici la distributivité) et non de recettes de « cuisine algébriques » (Arcavi et al., 1989) afin d'éviter une conception purement formaliste.

Ce mémoire a donc pour objectif d'analyser cette séquence d'introduction à l'algèbre via une analyse des productions des élèves et une restitution des résultats qui en découlent. À travers l'analyse de la variété des réponses des élèves et de leur pertinence, mais aussi des difficultés rencontrées, nous souhaitons répondre à la question de recherche suivante :

« Comment et à quelles conditions une séquence d'enseignement construite, à l'aide de problème de généralisation et de preuves, permet-elle aux élèves d'entrer dans l'algèbre de façon significative ? »

2. Expérimentation

2.1 Contexte

Cette séquence, intitulée « introduction au calcul littéral » a pris place du 12 mai au 1er juin 2022 au sein d'une classe de 9^{e} VP. Initialement, l'enseignante de mathématique aurait dû prendre l'intégralité de la séquence en charge, mais d'un commun accord, nous avons procédé par co-enseignement. L'enseignante de mathématique étant, au moment de l'expérimentation, étudiante de la HEP Vaud en Master secondaire 1 – mention Science de la nature et non pas au bénéfice d'une formation professionnelle pour l'enseignement des mathématiques, le choix du co-enseignement est apparu pertinent afin de pouvoir prendre en charge les processus de régulation (Allal & Mottier Lopez, 2007). Selon les recommandations de découpage des apprentissages visés émis par la DP-DGEP-HEP[7], cette séquence a pris place en toute fin d'année scolaire durant 2 semaines. Le retard accumulé par la classe et certaines modifications apportées au découpage pouvant compromettre la réalisation de l'expérimentation, nous avons pris la décision de reporter le chapitre intitulé "FA Fonctions diagrammes" :

RECOMMANDATION DP-DGEP 9S	ORGANISATION REELLE
NO Nombres rationnels	ES Représentation des solides
FA Fonctions diagrammes	GM Solides et divers mesures
ES Représentation des solides	NO Nombres rationnels
GM Solides et divers mesures	**FA Calcul littéral**
FA Calcul littéral	FA Fonctions diagrammes

[7] DP-DGEP-HEP : Direction pédagogique (DP), Direction générale de l'enseignement postobligatoire (DGEP) et la HEP Vaud.

Tableau 6 - Comparatif entre le découpage officiel et réel

Notons que les élèves avaient réinvesti, quatre semaines auparavant, des situations où la lettre était utilisée pour désigner des points, des grandeurs et pour du calcul d'aire et de volume. La séquence a été construite pour occuper sept périodes dont les dates ont été les suivantes :

SÉANCE	PRÉVISION	DATE
Séance 1 et 2 - Calcul réfléchi : Rappels sur les règles de la distributivité	1 x 45'	12 MAI
	1 x 45'	13 MAI
Séance 3 et 4 - Généralisation : Les carreaux colorés	1 x 45'	13 MAI
	1 x 45'	18 MAI
Séance 5 et 6 - Preuve : Le calcul littéral pour prouver (Les programmes de calculs)	1 x 45'	19 MAI
	1 x 45'	19 MAI
Séance 7 - Évaluation du type TA	1 x 45'	1 JUIN
Total :	7 x 45'	5 jours

Tableau 7 - Tableau comparatif entre le découpage prévisionnel et réel de la séquence

2.2 Participants

La classe était composée de 24 élèves dont deux redoublants, issues de milieux sociaux différents, mais aucun n'est issu de classes d'accueils. La répartition par genre est équitable, soit 12 filles et 12 garçons. Selon l'enseignante le niveau global de la classe en mathématiques est moyen, avec une hétérogénéité importante. Le climat de classe est tendu. L'enseignante fait état d'un manque de motivation en mathématiques, les élèves rencontrant des difficultés à se mobiliser et à faire leurs devoirs à la maison. Ils ont aussi un sentiment d'ennui et ne trouvent pas de plaisir et d'intérêt dans les cours. Enfin, durant l'expérimentation, il y a eu en moyenne jusqu'à deux absents selon les séances.

2.3 La séquence

Cette séquence repose sur un ensemble de séances non isolées. Afin de garantir une progression cohérente, nous avons identifié la nécessité pour les élèves de maîtriser la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Cela nous a conduits à la mise en place d'une activité préliminaire de « Calcul réfléchi », qui sera suivie par des activités de généralisation et de preuve.

2.3.1 Structure de la séquence d'enseignement

Cette séquence était constituée autour de sept séances (d'une période d'enseignement dont la durée est de 45 minutes chacune) organisées autour de trois grandes activités suivies d'une évaluation :

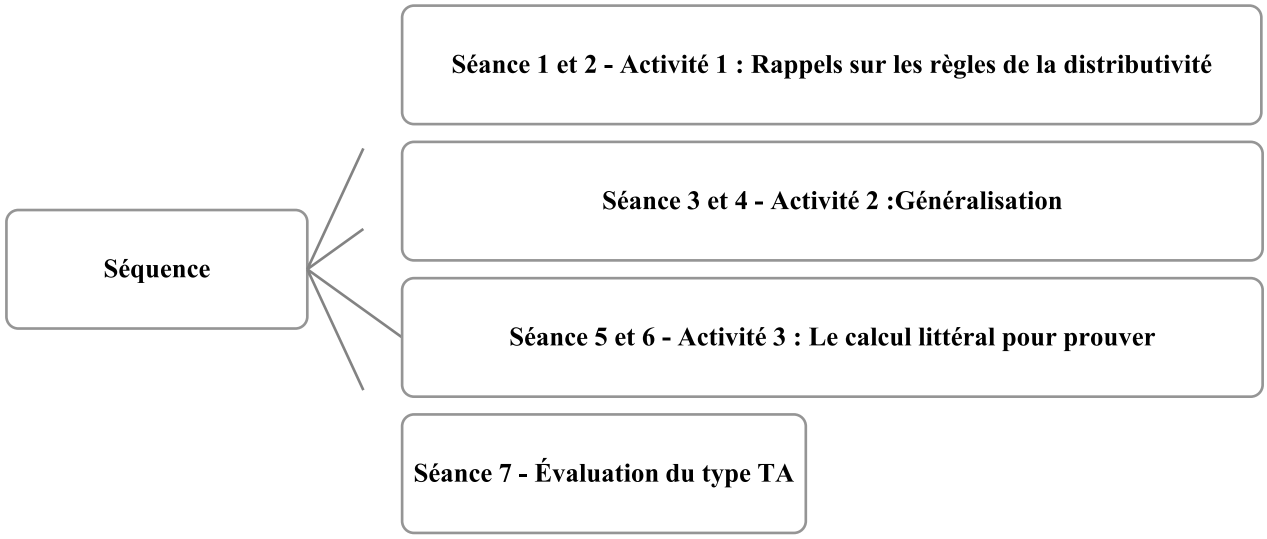


Figure 1 - Découpage de la séquence

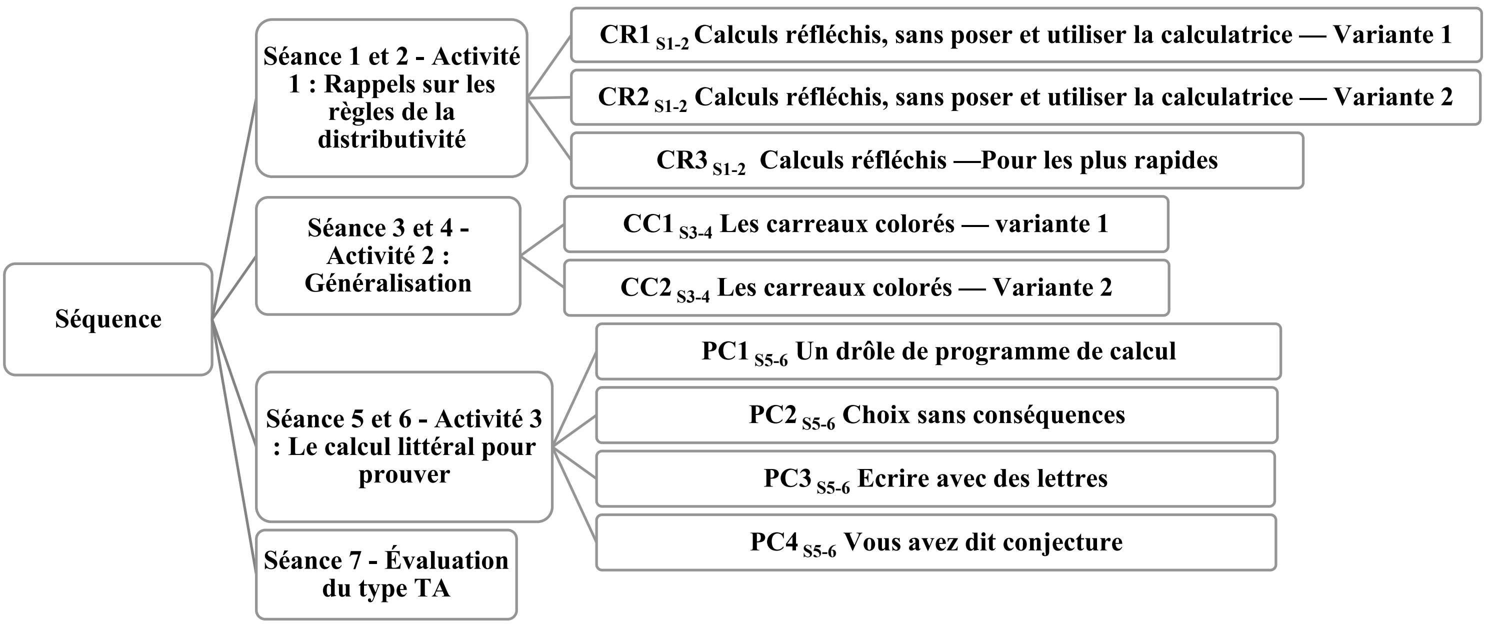


Figure 2 - Découpage des séances

Lors des séances, nous avons procéder aux institutionnalisations suivantes :

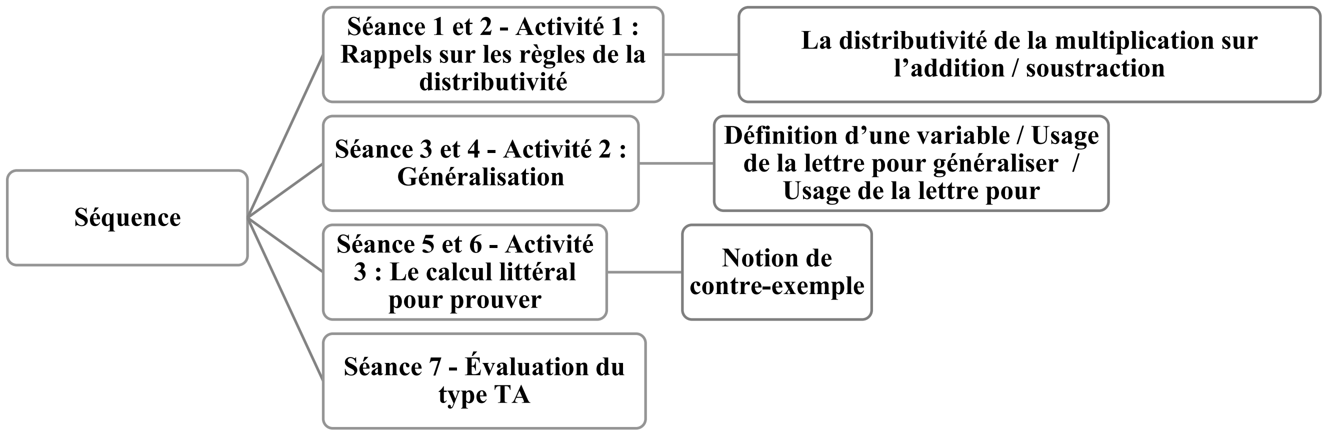


Figure 3 - Récapitulatif des institutionnalisations

2.3.2 Les activités proposées

Activité 1 – Le calcul réfléchi

Il était essentiel de prévoir une activité préalable qui permettait de réinvestir les connaissances préalables, telles que les règles de priorité, l'utilisation des parenthèses et surtout l'utilisation de la distributivité. En procédant ainsi, nous pourrons présenter la distributivité comme un élément technologique permettant de justifier la transformation des expressions littérales (Alves et al., 2013; Assude et al., 2012; Ferraton & Chaachoua, 2013). De plus nous évitons sa perte de sens lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre. Cela nous permettra également de travailler sur le statut de l'égalité, en passant du signe qui indique un processus de calcul à un signe qui représente une relation d'équivalence. Ce travail est nécessaire et peut devenir un obstacle à l'entrée dans l'algèbre en cas de défaut :

> « Dans son aspect « réfléchi » le calcul mental … opère sur des nombres et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité). C'est ainsi qu'au Collège, il va devenir un moyen de préparation des compétences algébriques. » (Lamorthe & Roubin, 2010).

Activité 2 : Les carreaux colorés

L'activité « Les carreaux colorés » est une adaptation de la situation d'apprentissage emblématique « le carré bordé » de Combier et al. (1996) présentée comme une situation d'enseignement sur l'introduction de la lettre dans l'ouvrage « Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! ». On la retrouve régulièrement aussi bien dans la recherche en didactique (des mémoires d'étudiants aux articles scientifiques) que dans les ouvrages d'enseignement. Partant d'un carré quadrillé de côté 6 (carrés unitaires), le but de cette activité consiste à établir une formule, à l'aide de plusieurs stratégies existantes dont celle sur la création de motifs (patterns) qui permet de calculer le nombre de carreaux colorés (ici en bleu), se trouvant dans la bordure, quel que soit le nombre de carreaux du côté du carré.

> « C'est un problème de généralisation. Un des objectifs de cette approche est de faire émerger les lettres comme nombres généralisés et d'engager les élèves dans l'utilisation du symbolisme pour produire des expressions générales afin de généraliser des propriétés en montrant l'insuffisance du cadre numérique. »(Coppé & Grugeon, 2009)

Ce faisant, cette activité va permettre de travailler des éléments de savoir fondamentaux pour construire un rapport à l'algèbre à la fois pour le sens de l'introduction d'une lettre et pour les techniques de calcul littéral (principalement la réduction). Cette activité sera composée de deux problèmes distincts (Fig. 4) portant sur deux configurations du carré.

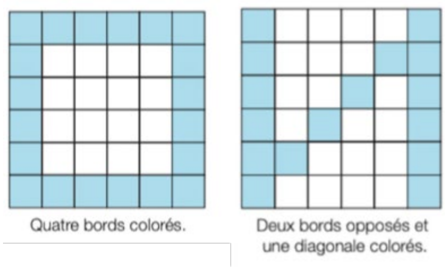


Figure 4 - Illustrations des 2 problèmes de la séquence

<u>Activité 3 : Les programmes de calculs</u>

En complément des travaux sur les « carreaux colorés », le groupe SESAMES (Coppé, 2020) a également travaillé sur des activités de preuve, les programmes de calculs, permettant de recourir à la lettre et également de donner des éléments de justifications des calculs algébriques (réduire, développer et factoriser). Ces activités permettent de travailler simultanément les dimensions « outil » et « objet » de l'algèbre et non l'une avant l'autre. La notion de programme de calculs s'est révélé être un sujet d'une grande importance dans les travaux en didactique des mathématiques (Coulange, 2019). Dans le domaine de la preuve, un travail autour des programmes de calcul permet, entre autres, aux élèves :

- « D'aborder une démarche de recherche : essais, conjecture, preuve,
- De se convaincre de la nécessité du passage au calcul littéral pour prouver une affirmation sur une infinité de valeurs (approcher la notion de variable),

- De trouver de l'intérêt des propriétés algébriques (distributivité simple, double distributivité...) dans le mécanisme de preuve,
- De travailler sur les deux aspects procédural et structural des expressions littérales,
- De découvrir la notion de contre-exemple,
- De comprendre les finalités des techniques de calcul littéral. » (Alves et al., 2013, p. 16).

Afin de susciter chez les élèves le besoin de produire une preuve en lien avec la conjecture, nous nous sommes inspirés pour cela des travaux de Coppé et Nigon (2014) et plus particulièrement des critères à prendre en compte pour la construction de cette activité :

- Faciliter l'engagement dans l'activité à l'aide de valeurs numériques et d'opérations accessibles ;
- La preuve de la conjecture n'est pas complément accessible ;
- La lettre n'est pas introduite dans l'énoncé ;

Cette activité est composée de quatre programmes de calculs reposant globalement sur le triptyque suivant :

- Choisir et tester : Choix des nombres, afin de faire fonctionner le PC avec des valeurs distinctes pour appuyer la future conjecture et enrichir les échanges lors de la mise en commun ;
- Conjecturer : c'est-à-dire de formuler un énoncé pour lequel on ne connait pas encore la preuve, mais que l'on croit fortement être vrai ;
- Formuler : les élèves sont invités à produire une formulation de la généralisation de la situation à l'aide de la lettre.

2.4 Analyse a priori des séances 1 et 2

Les activités des séances 1 et 2 (Annexe 1. et 1 bis.), portent sur la distributivité de la multiplication sur l'addition[8] et la soustraction[9] des entiers relatifs. Le choix d'aborder la distributivité n'est pas anodin, car sa maitrise sera déterminante durant les séances suivantes comme outil pour justifier les équivalences des expressions littérales. Cela fait écho au fait que la DMA/DMS peut être vue comme un savoir pré-algébrique potentiel, en amont de sa formalisation algébrique (Constantin & Coulange, 2019) mettant en évidence l'importance de

[8] DMA : Distributivité de la multiplication sur l'addition
[9] DMS : Distributivité de la multiplication sur la soustraction

la dialectique entre le numérique et l'algébrique (Coppé et al., 2016). Il s'agit présentement de réinvestir la propriété de distributivité abordée en 7-8^{e} et pour laquelle il est demandé aux élèves de consolider le savoir-faire suivant :

> « Transformer mentalement, par distributivité, une somme en un produit ou un produit en une somme, tels que : (13 x 47) + (7 x 47) = 20 x 47 et 21 x 17 = (20 + 1) x 17 = (20 x 17) + (1 x 17) = 340 + 17 » selon le livre du maitre de 7^{e} (page 47).

Ces activités mobilisent la propriété de distributivité dans le sens du développement et de la factorisation.

2.4.1 Les exercices de calcul réfléchi

Au-delà des démarches adoptées par les élèves et leur capacité à mobiliser la DMA/DMS, les productions mettront également en évidences différents types d'écritures (en ligne ou par empilement) ainsi que de fausses égalités. Les activités des séances 1 et 2 sont constituées de 13 exercices indépendants. Les élèves ne sont pas invités à utiliser l'algorithme de la multiplication, mais un calcul réfléchi. Pour effectuer leurs calculs, les élèves pourront soit utiliser la DMA/DMS dans le sens qui permet de passer d'un produit à une somme de produits (développement) et, réciproquement, d'exprimer certaines sommes par un produit (factorisation).

Ces pratiques présentent un intérêt non seulement pour acquérir de l'aisance en calcul réfléchi, mais aussi pour préparer les futures transformations d'écritures littérales.

Nous avons souhaité faciliter l'usage de la propriété de distributivité en jouant sur les variables didactiques liées à la nature des facteurs (Brousseau, 1986) et opter pour les choix suivants :

- Proposer des facteurs pouvant s'écrire comme $10^n + 1$ (ou 2) ou $10^n – 1$ (ou 2), privilégiant probablement plus la théorie de l'addition itérée sur la distributivité ;
    - o 45 x 21 c'est 45 x 20 + 45 x 1 et 26 x 98 c'est 26 x 100 - 26 x 2,
- Créer une rupture avec 23 x 103 et 43 x 32, privilégiant ainsi l'usage de la distributivité ;
- Ne pas proposer de facteurs du type : $5*10^n$, n entier naturel. Par exemple, 50 x 16, que l'on peut calculer ainsi : 100 x 16 / 2, occultant l'usage de la distributivité (Constantin & Coulange, 2019).

Nous ne traiterons pas de façon exhaustive ces exercices et adoptons le choix de mettre en avant quelques points importants :

- L'exercice « CR1 a. calculer 45 x 21 », donne lieu à plusieurs stratégies :

- Décomposition astucieuse d'un des facteurs afin de faire apparaitre un multiple de 10 : 45 x (20 + 1) avec utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition ou de l'addition itérée :
- Décomposition totale en ligne de tous les facteurs : (40 + 5) x (20 + 1) = 40 x 20 + 40 x 1 + 5 x 20 + 5 x 1 ;
- Décomposition et commutativité : 9 x 5 x 3 x 7 = 5 x 7 x 3 x 9 = 35 x 3 x 9 = 105 x 9 = 10 x105 — 1x105 ;
- Décomposition partielle d'un facteur : 45 x 2 puis 45 x 2 x 10 puis 45 x 2 x 10 + 45 ou 45 x 10, puis 450 x 2 enfin 450 + 45 ;
- Tâtonnements en utilisant la multiplication (45 x 10 = 450 puis 450 + 450 + 45), l'élève s'approche progressivement du résultat et il peut utiliser une addition pour terminer son raisonnement ;
- Changement de cadre à l'aide d'un plan de découpage (produit cartésien) :

20	**1**	
20 x 40	1 x 40	**40**
20 x 5	1 x 5	**5**

20	**1**	
20 x 45	1 x 45	**45**

Notons que la résolution des autres sous-activités donne lieu aux mêmes stratégies à ceci près que parfois il sera plus économique d'utiliser la DMS au lieu de la DMA.

- L'exercice « CR1 e. calculer 21 x 45 », donne lieu à plusieurs méthodes, mais il est plus économique de constater que 21 x 45 = 45 x 21 à l'aide de la propriété de commutativité et se référer à l'exercice CR1 a. ;
- L'exercice « CR2 a. calculer 8 x 15 + 2 x 15 », donne lieu à plusieurs stratégies dont :
  - Produit cartésien,
  - Mise en évidence d'un facteur commun (factorisation) : 15 x (8+2) ,
  - Addition itérée 8 fois 15 + 2 fois 15 c'est 10 fois 15.

2.4.2 Institutionnalisation

La propriété de distributivité a été institutionnalisée à l'aide d'ostensifs : flèches, couleurs pour distinguer somme et produit.

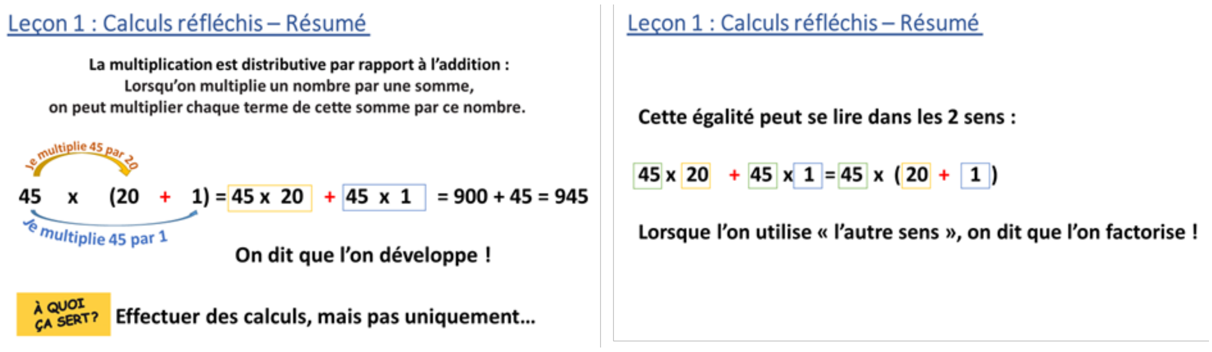


Figure 5 - Extraits des diapositives

Nous ne faisons pas référence au formalisme utilisé dans l'aide-mémoire (p. 26), car la notion de « variable » n'a pas encore été institutionnalisée :

Propriété 5

Lorsqu'on multiplie une somme ou une différence par un nombre, on peut multiplier chaque terme de cette somme ou différence par ce nombre.
La multiplication est distributive sur l'addition et la soustraction :
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ et $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Exemples
$12 \cdot (100 + 1) = 12 \cdot 100 + 12 \cdot 1 = 1200 + 12 = 1212$
$34 \cdot (10 - 1) = 34 \cdot 10 - 34 \cdot 1 = 340 - 34 = 306$

Figure 6 - Extrait de l'aide-mémoire p.26

2.5 Analyse a priori des séances 3 et 4

Les activités des séances 3 et 4 (Annexe 2 et 2 bis) sont représentées par deux problèmes, le second étant un variant du premier.

Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

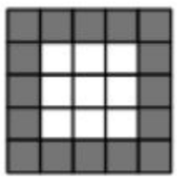
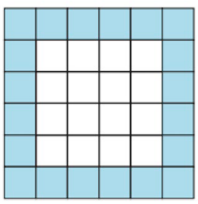
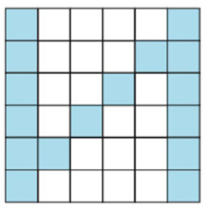


Figure 7 - Le texte initial de la situation des carreaux colorés (Combier et al., 1996 p. 42)



Quatre bords colorés.

Figure 8 - Activité CC1 S3-4



Deux bords opposés et une diagonale colorés.

Figure 9 - Activité CC1 S3-4

La situation des carreaux colorés a pour objectif de :

- Repérer et décrire des régularités composées de formes géométriques ;
- Avoir recourt à la lettre pour généraliser ;

- Faciliter la production de différentes formulations ;
- Discuter l'équivalence des expressions grâce à la DMA/DMS.

Les problèmes proposés dans ces séances permettent aux élèves d'explorer différentes stratégies pour les résoudre. Ils ont la liberté d'écrire une formule en utilisant les modalités qui leur conviennent, mais ils sont encouragés à utiliser une lettre pour représenter une variable. Cependant, le choix de la lettre n'est pas imposé aux élèves.

L'organisation didactique est telle que le problème CC1 $_{S3\text{-}4}$ (du type « construction » ou introduction d'un savoir) assume le rôle d'une situation problème (Arsac et al., 1988).

Les deux problèmes sur les carreaux colorés sont présents dans les MER de 10e à la fin du chapitre « Calcul littéral », comme exercices d'entrainement à l'utilisation du calcul littéral[10].

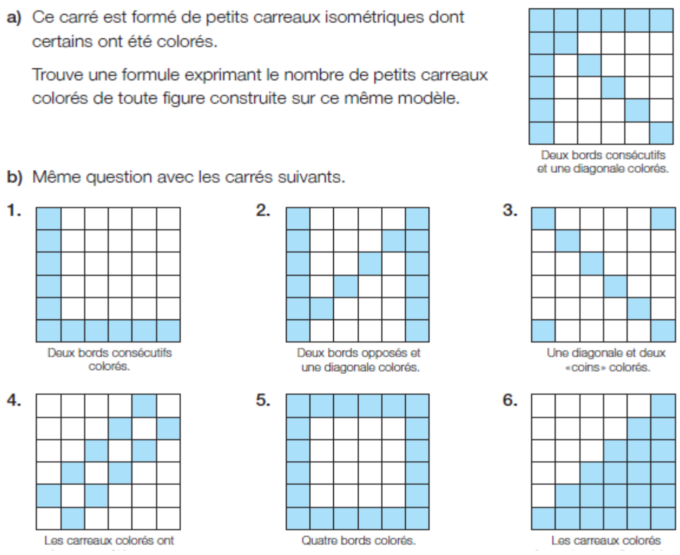


Figure 10 - Extrait du FA177 – Livre 10e p.113

2.5.1 Les problèmes de généralisation

<u>Le problème CC1 S3-4 - Les carreaux colorés (variante 1)</u>

Il est composé de cinq questions, aux objectifs distincts :

- CC1 $S_{3\text{-}4}$.abc : Les 3 premières amènent à créer des formules ;
- CC1 $S_{3\text{-}4}$.d : La 4e aborde les équivalences des formules ;
- CC1 $S_{3\text{-}4}$.e : La 5e permet d'initier un travail sur l'aspect structurel de l'écriture littérale.

<u>CC1 $S_{3\text{-}4}$.abc</u>

La formulation de l'énoncé retenu implique plusieurs phases de travail permettant ainsi, à l'aide d'un jeu sur la variable didactique « le nombre de carreaux colorés d'un côté du carré quadrillé

[10] Selon les commentaires en ligne du CIIP

», d'installer les élèves dans une situation de recherche par essai-erreur, conjecture, généralisation, et validation. Les valeurs de cette variable sont 6, 10 et 100. Les deux premières valeurs laissent aux élèves la possibilité de procéder par comptage des carreaux colorés, mais pour la valeur 100, le comptage devenant une démarche peu économique, cela devrait amener le recours à une autre méthode de résolution.

Pour un carré de côté 6, la stratégie la plus économique est le comptage des carreaux colorés. Le carré étant déjà représenté dans l'énoncé, on a 20 carreaux colorés. Pour autant il existe d'autres stratégies possibles que nous évoquerons dans le cas suivant du carré de côté 10. Pour un carré de côté 10, on peut soit :

- Stratégie D : Faire un dessin et procéder par comptage ;
- Stratégie R : Par itération (récurrence), ajouter 4 carreaux colorés pour chaque nouvelle taille du carré ;
- Stratégie P : reconnaitre des structures ou des patterns (motifs) qui pourraient se généraliser avec l'augmentation du côté du carré. Nous avons dénombré 6 patterns distincts :
    - P1 : Il y a 10 carreaux colorés sur chaque côté du carré. Mais en comptant ainsi, on a compté deux fois chaque carreau dans les coins. Il faut les enlever, $4 \times 10 - 4$,
    - P2 : Sur chaque côté du carré, on repère une bande de carreaux colorés avec 10-1 carreaux. Il y en a 4. On a alors : $4 \times (10-1)$,
    - P3 : On peut ajouter le nombre de carreaux d'un côté, ceux des deux côtés suivants qui seront déduits de 1 et du dernier déduit de 2, soit $10 + 2\times9 + 8 = 36$,
    - P4 : Il y a deux bandes de 10 carreaux l'une en face de l'autre. Il reste à ajouter les deux bandes de 8 carreaux : $2 \times 10 + 2 \times 8$,
    - P5 : Entre deux angles droits, il y a un nombre de carreaux colorés moins 2, donc $4 \times (10-2)$, puis on rajoute les 4 coins : $4 \times (10 - 2) + 4 = 36$,
    - P6 : différence de l'aire des 2 carrés : $10^2 - 8^2$.

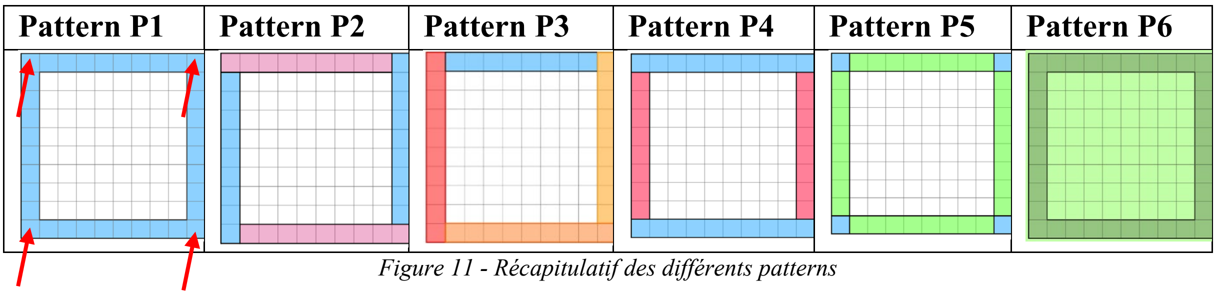


Figure 11 - Récapitulatif des différents patterns

Notons que ce travail « riche » sur les patterns s'appuie fortement sur la réalisation de dessins. Pour un carré de côté 100, le comptage n'est pas une stratégie économique. Il devient donc nécessaire d'utiliser un pattern pour le carré de côté 100. Notons que la valeur 100 de la variable didactique n'a pas été sélectionnée au hasard, par rapport à la valeur 10. Elle permet de travailler sur l'invalidité de la proportionnalité.

CC1 $S_{3\text{-}4}$.d

La question CC1 $S_{3\text{-}4}$ c. s invite les élèves à produire une expression générale sans en préciser la forme. Les élèves ont donc le choix de proposer soit une expression en langage naturel ou soit sous la forme d'une expression mathématique avec ou sans usage d'une ou plusieurs lettres / abréviations. Les difficultés rencontrées pour généraliser invitent les élèves à privilégier le langage algébrique et à introduire la lettre. Pour tout carré de côté n (n étant une variable représentant le nombre de carrés unitaire coloré sur un des côtés du carré) on obtient ainsi :

- Pattern P1 : Puisqu'on a un carré, le nombre de carreaux colorés correspond au périmètre auquel on enlève les quatre coins qui sont comptés deux fois. On aboutit à des expressions du type n+n+n+n-4 ou 4n-4 ;
- Pattern P2 : Pour éviter de compter deux fois les coins, on peut ajouter quatre fois n-1 carreaux. On aboutit à des expressions du type n-1+n-1+n-1+n-1 ou bien 4(n-1) via l'addition itérée ;
- Pattern P3 : On peut ajouter le nombre de carreaux d'un côté n, ceux des deux côtés suivants qui seront n-1 et celui du dernier n-2 (en tenant compte des coins). On aboutit à des expressions du type n+n-1+n-1+n-2 ou bien n+2· (n-1)+n-2 ;
- Pattern P4 : On peut ajouter le nombre de carreaux sur deux côtés opposés n et ensuite ceux sur les deux autres n-2. On aboutit à des expressions du type n+n+n-2+n-2 ou 2n+2· (n - 2) ;
- Pattern P5 : On peut ajouter 4 fois le nombre de carreaux sans les coins n-2 et ajouter 4. On aboutit à 4× (n-2)+4 ;
- Pattern P6 : On peut faire la différence des aires des carrés de côté n et n-2. On aboutit à une expression du type n^2— $(n-2)^2$.

Notons qu'il existe ,comme le précise Gulino (2017), une autre perspective de résolution en désignant n comme variable représentant le nombre de carrés unitaires blancs sur un des côtés du carré blanc (intérieur), mais nous émettons l'hypothèse que cette perspective sera faiblement mobilisée par les élèves en raison de l'énoncé, et principalement en raison des questions a. et

b. de l'activité qui incitent à se concentrer sur les carreaux colorés. Le problème aborde également la notion d'équivalences des expressions littérales lors de la question $CC1_{S3\text{-}4}$ d. En effet la grande diversité des stratégies de calcul implique l'existence de plusieurs expressions littérales, à structures différentes, permettant de traduire le nombre de carreaux colorés. Cette tache permet donc de discuter l'équivalence des expressions grâce à la propriété de DMA/DMS. On consolide ainsi l'utilisation de la DMA/DMS pour prouver. Cela donne un sens supplémentaire à la DMA/DMS.

Les expressions possibles obtenues lors de l'activité 1 sont :

4n – 4	**4(n – 1)**	**n + n – 1 + n – 1 + n – 2**
n + n + n – 2 + n – 2	**4(n – 2) + 4**	**$n^2 - (n-2)^2$**

Figure 12 - Récapitulatif des expressions littérales

- L'application de la DMA sur les expressions 4 × (n-1) et 4 × (n-2) + 2 donne 4n-4 ;
- L'application de l'addition itérée sur n+n-1+n-1+n-2 et n+n+n-2+n-2 donne 4n-4 ;
- L'expression n^2 - $(n-2)^2$ se révèle plus complexe à traiter, car nécessitant la double distributivité.

La dernière question $CC1_{S3\text{-}4}$ e permet une entrée progressive dans la compréhension des expressions algébriques pour leurs aspects structuraux. L'objectif étant de montrer que 4(n-1) est un multiple de 4, pour toute valeur de n >1, n ∈ ℕ. Cela est permis par l'équivalence des formules précédentes.

<u>Le problème CC2 S3-4 - Les carreaux colorés (variante 2)</u>

Cette activité est un réinvestissement de l'activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ à ceci près qu'elle ne contient qu'une question. Les étapes ou sous-activités de l'activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ ne sont pas reprises. Il est immédiatement demandé aux élèves de trouver une formule et donc de recourir à la lettre.

Activité 3.

Tu as un carré de côté 6 carreaux dans lequel des petits carreaux sont colorés.

a. Trouve une formule, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux colorés pour n'importe quel carré.

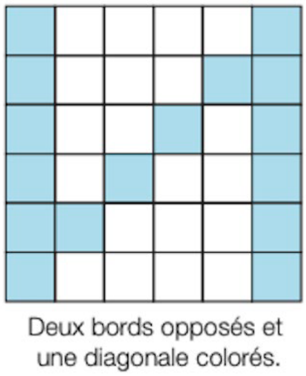


Figure 13 - Activité CC2 S3-4

Il est également possible compte tenu de la ressemblance graphique avec l'activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ que certains élèves s'engagent à suivre des étapes intermédiaires. À partir du carré de côté 6, les élèves peuvent émettre les stratégies suivantes :

- Stratégie D' : Faire un dessin et procéder par comptage ;
- Stratégie R' : Procéder par itération et essayer avec des carrés de 7, 8… et conjecturer qu'il faut ajouter 3 carreaux colorés pour chaque nouvelle taille du carré ;
  - Carré de côté 6 = 16 = 12 + 4 = 2 × 6 + 4,
  - Carré de côté 7 = 19 = 14 + 5= 2 × 7 + 5,
  - …
- Stratégie P' : Reconnaitre des structures ou des patterns (motifs) qui pourraient se généraliser avec l'augmentation du côté du carré. Nous avons dénombré quatre patterns distincts ;
  - Pattern 1' : Il y a une diagonale de 6 carreaux colorés (il suffit de translater chaque carreau de la diagonale pour se convaincre que la diagonale compte comme un côté du carré), mais en comptant ainsi, on compte deux fois le carré en bas à gauche et en haut à droite. Il faut donc les enlever 6 + 2 × (6 - 1) = 16,
  - Pattern 2' : On dénombre 2 bandes de 6 carreaux et une diagonale de 6 - 2 carreaux,
  - Pattern 3' : On dénombre 3 bandes de 6 carreaux - 2 carreaux,
  - Pattern 4' : Différence de 2 surfaces : 6^2 — (5 × 4), l'aire du carré étant 6^2 et l'aire du rectangle « Bleu et orange » étant constitué de (6 – 1) lignes et (6 – 2) colonnes.

Pattern P1'	Pattern P2'	Pattern P3'	Pattern P4'

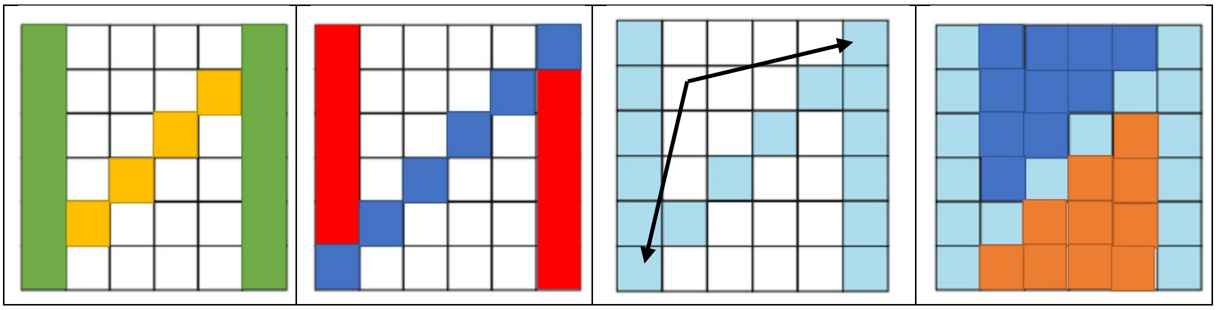


Figure 14 - Patterns problème CC2

Pour tout carré de côté n, on obtient ainsi :

- Pattern P1’ : On aboutit à des expressions du type $2 \times (n) + (n - 2)$;
- Pattern P2’ : On aboutit à des expressions du type $2 \times (n — 1) + n$;
- Pattern P3’ : On aboutit à des expressions du type $3 \times n – 2$;
- Pattern P4’: On aboutit à des expressions du type $n^2 - (n - 1) \times (n - 2)$.

Toutes ces expressions sont équivalentes à $3n – 2$.

2.5.2 Institutionnalisation

Pour designer n’importe qu’elle nombre de carreaux colorés représentant l’arête du carré, on peut utiliser une lettre de l’alphabet , par exemple la lettre « n », écrite en minuscule. Ce nombre représente une « variable numérique ». « n » peux varier et peut prendre toutes les valeurs entières possibles : 1, 2, ….10,…53,….   **On écrira : Soit « n » le nombre de carreaux colorés sur un coté du carré.**

2.6 Analyse a priori des séances 5 et 6

Les séances 5 et 6 reposent sur quatre programmes de calculs. L’objectif est de permettre aux élèves d’établir des conjectures et de les démontrer. Le calcul littéral est ainsi perçu conne un outil pour prouver.

2.6.1 Les problèmes de preuve

<u>Le problème PC1 S5-6. Un drôle de programme de calcul</u>

Ce problème est conçu comme une introduction à la méthode de preuve en utilisant un PC.

Les élèves doivent trouver la valeur 8 quel que soit le choix du nombre de départ.

La conjecture est donc « Le PC donne toujours 8 ».

Puis, ils doivent introduire la lettre (représentant un nombre quelconque), n choisit arbitrairement, et produire l'expression suivante : 2n + 8 - 2n, ce qui devrait permettre de prouver que cette expression est égale à 8 à l'aide des règles explicites d'additions et de soustractions étendues aux monômes (pas encore institutionnalisé) que nous pourrons justifier à l'aide de la propriété de distributivité : $2n + 8 – 2n = 2n – 2n +8 = n (2 - 2) + 8 = n (0) + 8 = 8$

Voici un programme de calcul :
• Choisir un nombre.
• Multiplier ce nombre par 2.
• Ajouter 8 au résultat.
• Soustraire (retranche) le double du nombre de départ.

a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix.

b. Que remarques tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ?

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

Figure 15 - Activité PC1 S5-6

<u>L'activité PC2 S5-6. Choix sans conséquences</u>

Ce problème vise à réinvestir la notion de preuve et introduire la représentation des nombres pairs. Ce PC se distingue du précédent par le fait qu'il va permettre de réinvestir la notion structurale des expressions littérales avec un travail sur l'expression générale qui gouverne les propriétés des nombres pairs (le choix du nombre se fait dans ℕ) et après le travail l'écriture littérale des multiples de 4 lors de $CC1_{S3-4}$ e. Les élèves doivent trouver le double du nombre choisi au départ, quel que soit le choix du nombre de départ. La conjecture est donc « Le PC donne toujours le double du nombre choisi au départ. ». Puis ils doivent introduire la lettre n (représentant un nombre quelconque) et produire l'expression suivante : 2(n + 4) — 8. Ce programme de calcul se distingue du précédent par un niveau de complexité supérieur avec l'apparition de parenthèses. Cela permet d'aborder à nouveau la distributivité dans le cadre algébrique. Enfin, il est demandé de prouver que cette expression est égale à 2n l'aide de la DMA. Cette expression représente la forme générale des nombres entiers naturels pairs.
On abordera donc l'aspect structural de cette expression en rappelant la définition d'un nombre pair, c'est-à-dire un nombre multiple de 2, qui peut s'écrire 2n, avec n ∈ ℕ.

- Choisir un nombre.
- Ajoute 4.
- Multiplie par 2.
- Soustraire (retranche) 8.

a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix.

b. Quelle conjecture peut-on formuler ?

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

Figure 16 - Activité PC2 S5-6

<u>L'activité PC3 S5-6. Écrire avec des lettres.</u>

Ce problème vise à réinvestir la notion de preuve et introduire la représentation des nombres impairs. Elle est organisée avec de légères différences par rapport à la précédente et un niveau de complexité supérieur.

- L'énoncé ne guide pas les élèves dans le processus de conjecture. Les élèves vont devoir prendre à leur charge ce processus et tester le PC avec des nombres choisis au hasard. Les élèves doivent trouver le nombre entier consécutif au double du nombre choisi au départ. Cette conjecture n'est pas simple à déterminer, ils devront tester le PC avec probablement plus de valeurs que dans le précédent PC ;
- Puis ils sont invités à exprimer cette conjecture sous la forme d'une expression algébrique. À cette étape, ils doivent introduire la lettre n (représentant un nombre quelconque) et produire l'expression suivante : 2(n + 4) -7 et prouver que cette expression est égale à 2n+1 l'aide de la DMAS.

Cette expression représente la forme générale des nombres entiers naturels impairs.

La dernière question engage à nouveau les élèves dans un processus de preuve à l'aide de la notion de nombre consécutif. Il est demandé de prouver des propriétés arithmétiques en mobilisant la factorisation au service de la démonstration.

Les élèves sont invités à prouver que la somme de 2 nombres entiers naturels consécutifs est impaire.

- Les élèves introduisent à nouveau la lettre n pour désigner un nombre entier et n+1 le nombre suivant ;
- La somme permet d'obtenir : n + n + 1 = n (1+1) +1 qui après réduction à l'aide de la factorisation donne 2n + 1.

Choisir un nombre.
• Ajoute 4.
• Multiplie par 2.
• Soustraire (retranche) 7

a. Quelle conjecture peut-on formuler ?

b. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

c. Prouver que la somme de deux entiers consécutifs est TOUJOURS impaire

Figure 17 - Activité PC3 S5-6

L'activité PC4 S5-6. Vous avez dit "conjecture"

Ce problème vise à réinvestir la notion de preuve et introduire la notion de contre-exemple. Il est d'abord demandé de tester trois programmes à l'aide des valeurs 1 et -5. Le fait d'imposer les valeurs va permettre aux élèves de s'approprier rapidement l'activité.
Les élèves doivent trouver la valeur 0 quel que soit le programme pour les valeurs initiales 1 et -5. La conjecture la plus probable émise par les élèves est que les trois programmes de calculs donnent la valeur 0 indépendamment du nombre choisi au départ. À ce stade, les élèves sont confrontés à l'empirisme naïf défini par Balacheff (1982) et repris dans les travaux de Coppé et Nigon (2014, p. 15), c'est à dire que les élèves montrent leur confiance en la conjecture basée sur peu de cas. Puis ils sont invités à choisir un nombre au hasard et tester à nouveau les 3 programmes. La viabilité de la conjecture va se confronter aux nombreux contre-exemples qui apparaitront (Si -2 est la valeur de départ, on obtient respectivement -9 ; -9 et -18.). À cette étape, il n'est pas demandé d'aller plus loin, ni de produire une expression, mais de comprendre qu'un ou plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation est vraie, mais un contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation est fausse. Grâce au calcul littéral, on peut prouver que notre conjecture était fausse. L'usage de la lettre et des expressions algébriques devient ainsi fondamental pour généraliser un phénomène mathématique.

Voici 3 programmes de calculs

Programme 1	Programme 2	Programme 3
Choisir un nombre Ajouter 4 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 5	Choisir un nombre Ajouter 2 Prendre le carré du résultat précédent Soustraire 9	Choisir un nombre Écrire son double puis ajouter 8 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 10

1. Calcule les résultats des trois programmes pour la valeur 1 et -5 ?
   Qu'observe-t-on ?
2. Quelle conjecture peut-on formuler ?
3. Choisis un nombre au hasard et calcule les résultats des trois programmes pour cette valeur.
   Qu'observe-t-on ?

Figure 18 - Activité PC4 S5-6

2.6.2 Institutionnalisation

En mathématiques, un contre-exemple est un exemple, un cas particulier qui contredit les premières impressions.
Un contre-exemple peut aussi être donné pour rejeter une conjecture.

2.7 Analyse a priori de l’évaluation (Annexe 4)

L’évaluation est composée d’exercices et de problèmes congruents avec ceux abordés lors de la séquence d’enseignement et conformément aux conclusions des travaux de Pilet et Horoks (2015) sur la nécessité de prendre en compte la distance des activités travaillées en séances ordinaires et celles proposées dans le cadre d’une évaluation certificative.

2.7.1 Les activités

<u>Exercices de calculs réfléchis (Eval. CR1)</u>

Elle reprend les activités des séances 1 et 2 sur les propriétés de la distributivité de la multiplication sur l’addition et la soustraction et l’écriture horizontale dans le sens du développement et de la factorisation. Les quatre sous-activités donnent lieu à plusieurs stratégies :

- 99 x (20 + 1) ou (100 – 1) x 21, cette dernière est privilégiée en raison du facteur 99 en position 1
- (10 + 3) x 101 ou 13 x (100 +1), cette dernière est privilégiée en raison du facteur 101 en position 2
- (87 + 13) x 25 = 100 x 25, car les facteurs 87 et 13 sont en position 1 favorisant la reconnaissance d’une addition itérée.

- 4 x (1000 – 2) = 4 x 1000 – 4 x 2, privilégiée en raison du facteur 998 en position 2.

Problème de généralisation (Eval. PG1)

Cette activité, posée sous une forme ouverte, a pour objectif de renforcer les compétences de résolution de problème et de justifier l'utilisation de formules algébriques, c'est-à-dire d'utiliser la lettre afin de généraliser et trouver le nombre de cubes pour n'importe quelle étape. La visualisation dans l'espace est un objectif mathématique secondaire.

1. **Calculer le nombre de petits cubes à chaque étape ci-dessous (étape 1 à 3).**
2. **Combien de petits cubes contient la figure à l'étape 20 ?**
3. **Trouve une formule afin de calculer le nombre de petits cubes pour n'importe quelle étape.**

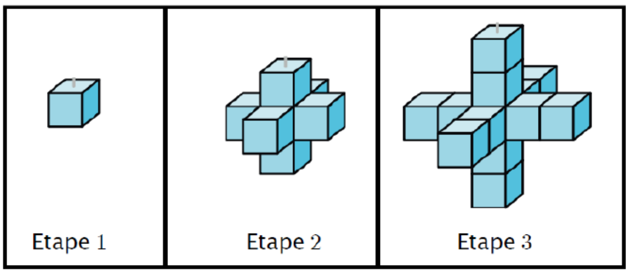


Figure 19 - Eval. PG1

La résolution reprend les principes de celle du carré bordé :

1. Visualiser les situations d'empilements des cubes ;
2. Procéder à l'aide du dénombrement ;
3. Comprendre la différence entre un empilement à l'étape 2 et 3 ;
4. Se rendre compte de la limite de la procédure précédente pour l'étape 20. La valeur 20 de la variable didactique « le nombre d'étapes" conduit les élèves à ne plus pouvoir visualiser dans l'espace la figure ;
5. Déterminer un motif ou pattern afin d'élaborer une stratégie de calcul ;
6. Élaborer une expression littérale ou programme de calcul qui permet de généraliser ;
7. Tester éventuellement son programme de calcul pour les étapes 1 à 3 ou plus ;
8. Parvenir à l'expression 6(e – 1) + 1 ou e représente le numéro de l'étape.

Programme de calcul (Eval. PC1)

Ce PC est légèrement plus long, car il contient plus d'opérations, que ceux abordés lors des séances 5 et 6. La conjecture est le « Le PC donne toujours le nombre choisi au départ ».

La difficulté réside dans la formulation du PC, son développement et sa réduction, les élèves pouvant concevoir comme acquise l'équivalence suivante : 2(2n+5) -3n -10 = n.

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre entier positif
- Doubler le
- Ajouter 5
- Doubler
- Retirer le triple du nombre de départ
- Retirer 10
- Ecrire le résultat

1. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix
2. Quelle conjecture peut-on formuler ?
3. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

Figure 20 - Eval. PC1

<u>Programme de calcul (Eval. PC2)</u>

Voici un programme de calcul :

- Choisir 3 entiers consécutifs (qui se suivent en ordre croissant)
- Calculer leur somme

1. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix
2. Quelle conjecture peut-on formuler ?
3. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

Figure 21 - Eval. PC2

Ce PC diffère des autres PC abordés lors des séances 5 et 6. La difficulté réside dans l'aspect structural d'un nombre consécutif. Sa résolution va dépendre du choix de l'entier auquel sera attribuée la lettre :

- Soit n désigne le premier entier, le second s'écrira n+1 et le troisième n+2. Leur somme sera n+n+1+n+2=3n+3, mais à cette étape, il n'est pas simple de remarquer que 3n +3 = 3 (n+1) c'est à dire trois fois le second entier ;
- Soit m désigne le second entier, celui du « milieu », le premier s'écrira m - 1 et le troisième m+1. Leur somme sera m-1+m+m+1=3m ;

En examinant les différents éléments clés de la séquence, sa structure et comment les différentes séances s'articulent les unes avec les autres, ainsi que les activités proposées aux élèves nous avons obtenus une vision globale du déroulement de l'enseignement et de la progression prévue. Enfin, l'examen des activités d'évaluation nous a permis de vérifier que les activités proposées étaient alignées sur les objectifs d'enseignement de la séquence. Tous ces éléments, nécessaires à la conception et la mise en œuvre de l'expérimentation seront nécessaire à son analyse.

3. Analyse de l’expérimentation

Nous procédons à l'analyse des travaux des élèves relatifs aux activités abordées dans le chapitre précédent. Nous décrirons les différentes étapes de notre analyse, en commençant par la collecte des données, puis en exposant notre méthodologie et les indicateurs que nous avons choisis afin de déterminer les signes d’une entrée significative dans l’algèbre.

3.1 Traces

Nous avons travaillé principalement à partir de données issues des traces écrites des élèves qui ont travaillé individuellement. Au début de chaque séance, nous avons distribué à chaque élève un document contenant le ou les énoncés sur lequel ces derniers devaient écrire. Nous avons collecté ces documents soit pendant ou à la fin de chaque séance afin de les numériser. Nous avons également placé une caméra fixe afin de filmer le tableau noir et les moments de mise en commun. Notre volonté initiale d’interagir le moins possible avec la classe a été mise à l’épreuve en raison d’éléments abordés dans le chapitre 2.

3.2 Méthodologie d’analyse

Pour la conduite de cette étude, nous avons choisi d’analyser les productions des élèves en distinguant chacune des activités et selon le processus ci-dessous :

- Activités de calcul réfléchi : Analyse a posteriori, non exhaustive, des productions écrites : examen des techniques utilisées par les élèves, identification des erreurs courantes, etc. ;
- Problèmes de généralisation et preuve : Analyse des productions au regard d’indicateurs susceptibles de nous renseigner sur le développement d’une pensée algébrique naissante, inspirés des travaux de Larguier (2015).

De nombreux travaux supposent que certaines pratiques pédagogiques sont plus efficaces que d'autres pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves du collège. Ainsi, il est crucial de comprendre comment structurer des séquences d'enseignement pour identifier les pratiques les plus pertinentes, afin de soutenir le développement des compétences algébriques en favorisant la transition d'une pensée centrée sur les objets à une pensée centrée sur les relations. En effet, dans son étude sur le raisonnement mathématique, en tant qu’activité intellectuelle de manipulation d‘information pour produire de nouvelles informations, en situation de résolution de problème de généralisation et de preuve, au moment d’introduire l’algèbre, cette dernière observe un déplacement d’une pensée arithmétique vers une pensée algébrique. Cette pensée algébrique se concrétise alors au travers d’indicateurs :

Pensée strictement arithmétique	Indicateurs d'une pensée algébrique :
• Le résultat est uniquement fonction des données connues	• Repérage de régularités • Utilisation d'un exemple générique pour exprimer la généralité. • Le résultat utilise des grandeurs non données • Écart avec le contexte, voire oubli du contexte pour transformer l'expression de la généralité grâce aux règles du calcul algébrique (utilisation de la distributivité • Validation de l'expression exprimant la généralité (Test de validité)

Tableau 8 - Synthèse des indicateurs d'une pensée arithmétique vs algébrique (Larguier, 2015)

Sur la base de ces indicateurs, nous pouvons dire que développer une pensée algébrique, c'est à minima entrer dans l'algèbre de façon significative. La capacité à repérer des régularités et à exprimer une généralité à l'aide d'un exemple générique montre une compréhension croissante de la notion de variable et de l'abstraction algébrique. L'écart avec le contexte peut indiquer que les élèves ont compris que l'algèbre est un système de règles qui peut être utilisé indépendamment des situations spécifiques. La validation de l'expression de la généralité indique une compréhension plus avancée des concepts algébriques. Enfin, l'utilisation de la distributivité dans le cadre algébrique invite les élèves à donner du sens aux manipulations formelles. Tous ces indicateurs sont l'expression d'une approche globale de la pratique algébrique et abordée au paragraphe 1.2.5. Dans le but de retracer le développement de la pensée algébrique, nous avons utilisé le schéma de Larguier (2015) (Fig. 31) ,auquel elle rajoute la typologie des preuves décrites par Balacheff (1987) pour interpréter le raisonnement des élèves. Larguier propose sept niveaux de raisonnement, distingués en deux catégories, ceux des preuves pragmatiques et ceux des preuves intellectuelles, comme des marqueurs croissants du développement de la pensée algébrique et en opposition avec une pensée arithmétique :

Pensée arithmétique ⟵ Début de la pensée algébrique ⟶ Pensée algébrique

A	B	C	D	E	F	G
Cas particuliers pris comme exemples	Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	Exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisa-tion en langage algébrique avec usage des lettres

$\underbrace{\text{A, B, C}}_{\text{Preuve pragmatique}}$ $\underbrace{\text{D, E, F, G}}_{\text{Preuve intellectuelle}}$

Preuve pragmatique | Preuve intellectuelle

Tableau 9 - Grille d'analyse de la production d'élèves (Larguier, 2015)

Pour l’analyse des carreaux colorés, nous avons repris le schéma d’origine. Ainsi, le niveau A correspond à la stratégie D (à l’aide d’un dessin), reposant sur des dessins de carrés de tailles croissantes. Cela traduit une pensée strictement arithmétique qui ne permettra pas d’exprimer la généralité. De même, le niveau B correspond à la stratégie R (par récurrence). Le niveau C, signe les prémices d’une entrée dans la pensée algébrique. Pour formuler la généralité, les élèves doivent faire appel à deux objets : le nombre total de carreaux colorés et le nombre de carreaux colorés d’un côté. En outre, l’élève doit utiliser des patterns pour exprimer ces idées, qui peuvent prendre différentes formes telles que des dessins, du langage naturel, des abréviations ou des lettres qui ne sont pas liés aux mots du langage courant. La convocation de ces objets est alors un marqueur de l’entrée dans l’algèbre de façon significative. Pour l’analyse des programmes de calculs, la nécessité de l’usage de la lettre pour généraliser un phénomène sur une infinité de valeurs n’est pas nouvelle pour les élèves, surtout après les problèmes sur les carreaux colorés. Ce qui est nouveau pour eux, c’est l’usage de la lettre dans le domaine de la preuve. Au travers des indicateurs ci-dessus, nous cherchons à montrer que les élèves vont spontanément mobiliser la dimension « outil » de l’algèbre et utiliser la lettre pour exprimer la conjecture sur une infinité de nombres, mais également mobiliser la dimension « objet » pour prouver qu’une conjecture est vraie sur une infinité de nombres et ainsi faire appel à la distributivité pour manipuler l’expression. En complément du schéma de Larguier (2015), nous avons souhaité nous intéresser aux types de preuve défini par Balacheff (1987) :

- L’empirisme naïf : Les élèves effectuent des tests sur au moins trois nombres pour valider leur conjecture, en supposant que si cela fonctionne pour ces nombres, cela fonctionnera pour tous les nombres ;
- L’expérience cruciale : Les élèves choisissent un nombre "compliqué" ou très grand et pensent que si la règle fonctionne pour ce nombre, elle fonctionnera pour tous les nombres ;
- L’exemple générique : Les élèves donnent un exemple spécifique pour illustrer leur règle, en utilisant des opérations telles que la multiplication par 2, l'ajout de 8 et la soustraction du double du nombre de départ. Donc ça annule la multiplication par 2 et il reste 8;
- L’expérience mentale : Les élèves essaient de raisonner mentalement en traduisant les opérations en phrases telles que "On multiplie le nombre choisi par deux et on soustrait

deux fois ce nombre, ce qui s'annule et laisse seulement le chiffre 8" ou en utilisant une expression littérale ;

- La démonstration : Les élèves utilisent une expression littérale et la distributivité pour prouver l'équivalence des formules.

La mobilisation des types de preuves par les élèves et l'évolution de leurs usages seront des marqueurs importants quant au développement d'une pensée algébrique.

Pensée arithmétique — Début de la pensée algébrique — Pensée algébrique

A	B	C	D	E	F	G
Cas particuliers pris comme exemples	Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	Exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres

Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle		
L'empirisme naïf	L'expérience cruciale	L'exemple générique	L'expérience mentale	Le calcul sur les énoncés	La démonstration en mobilisant la distributivité dans le cadre algébrique

Tableau 10 - Typologie de preuve (Balacheff, 1987)

3.3 Analyse des séances 1 et 2

Le déroulement des séances 1 et 2 a été globalement conforme sur le plan de la séquence (annexe 1 bis), mais le temps nécessaire aux différentes phases a été plus long. Cet écart s'explique par les premiers résultats de la séance 1 et les difficultés rencontrées sur la propriété de distributivité dans le sens du développement. Au total, nous avons clôturé les deux séances avec 30 minutes de plus que prévu, nous obligeant ainsi à empiéter sur les autres séances.

3.3.1 Analyse du CR1

a. 45 x 21 =	b. 26 x 98 =	c. 23 x 103 =
d. 43 x 32 =	e. 21 x 45 =	

Figure 22 - Exercices CR1

L'analyse des productions a fait apparaitre une mise en activité réelle. Sur les 5 exercices du CR1, les élèves ont essayé de résoudre en moyenne quatre exercices sur cinq. Les élèves ont eu

10 minutes pour effectuer ces cinq calculs. Ce temps de travail s'est révélé assez court pour cette classe. De plus, les résultats des calculs sont assez mitigés, avec un taux de réussite moyen de 51%.

Exercice	1.a	1.b	1.c	1.d	1.e
Nombre de résultats juste avec justification	12 sur 22	12 sur 22	10 sur 22	10 sur 22	12 sur 22

Tableau 11 - Comparatif des résultats des élèves CR1

L'analyse de l'exercice 1.a ($45 \times 21 =$) résume les types de procédures et d'écriture que l'on retrouve sur les autres exercices :

PRODUCTION	RÉSULTAT	Nb d'élèves	ÉCRITURES	COMMENTAIRES
$\begin{cases} 45 \times 10 = 450 \\ 45 \times 10 = 450 \end{cases} = 900 + 45$	Juste	3	Empilement	
$\begin{cases} 20 \times 45 \\ 1 \times 45 \end{cases}$	Juste	3	Empilement	Résultat final obtenu à l'aide du calcul mental
$45 \times 2 = 90 \times 10 = 900 + 45 = 945$	Juste	3	En ligne	Fausses égalités
$5 \times 21 = 105$ $4 \times 21 = 84$ $84 \times 10 = 840$ $105 + 840 = 945$	Juste	1	Empilement	Décomposition additive multiple
$45 \times (20 + 1) = 45 \times 20 + 45 \times 1 = 900 + 45 = 945$	Juste	1	En ligne	Utilisation de la distributivité
$(40 \times 20) + (40 \times 1) + (5 \times 20) + (5 \times 1) = 945$	Juste	1	En ligne	Décomposition additive multiple – Double distributivité
$40 \times 20 = 800$ $et\ 5 \times 1 = 5$; $800 + 5 = 805$	Faux	6	Empilement	Représente la majorité des erreurs.
Sans productions	…	4	…	…

Tableau 12 - Typologie de résolution de l'exercice CR1 1.a

L'analyse ci-dessus montre une méconnaissance réelle de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour pratiquement toute la classe. Le type d'écriture est représenté de façon équitable entre l'écriture par empilement et l'écriture en ligne. Les nombreuses erreurs sont liées aux erreurs de calcul et surtout à une fausse représentation de la propriété de la double distributivité :

$$(45 \times 21) = (40 + 5) \times (20 + 1) = (40 \times 20) + (5 \times 1)$$

Cette problématique fait référence à celle cité par Constantin & Coulange (2017) et énoncée par Schifter (1997, p. 15) :

That would be 18 x 12, and I know 10 x 10 is 100 and 8 x 2 is 16, so if you add them together it would be 100 + 16 = 116.

Figure 23 - Schifter (1997, p. 15)

En plus de la distributivité, nous avons souhaité observer la mobilisation de la propriété de commutativité au travers de l'exercice 1.e. Nous avons noté que sur les 22 copies, 18 ont répondu à l'exercice 1.e. mais seulement 6 élèves semblent avoir mis en évidence la commutativité de la multiplication en ne procédant pas à des calculs :

CR1.e

e) même chose que a	e = a
E) + A) 9 5×1 = 45 • 10 : 2 + 450 = 945.	

Figure 24 - Quelques extraits de 1.a et 1.e

3.3.2 Analyse du CR2

a. 8 x 15 + 2 x 15 =	b. 12 x 32 – 2 x 32 =	c. 101 x 72 - 72 =
d. 155 x 99 + 101 x 155		

Figure 25 - Exercices CR2

Le travail mené sur la distributivité dans le sens du développement à fortement orienté la résolution des exercices du CR2. Les résultats sont du même ordre que ceux de l'activité CR1 :

Exercice CR2	1.a	1.b	1.c	1.d
Nombre de résultats juste	14 sur 22	12 sur 22	11 sur 22	10 sur 22

Tableau 13 - Comparatif des résultats des élèves CR2

L'analyse de l'exercice 2.d ($155 \times 99 + 101 \times 155 =$) résume les types de procédures et d'écriture que l'on retrouve dans l'activité CR2 S1-2.

PRODUCTION	RÉSULTAT	FREQUENCE	ÉCRITURES	COMMENTAIRES
$155 \times 99 + 101 \times 155$ $= (99 + 101)$ $\times 155$ $= 200 \times 155$ $= 31\,000$	Juste	6	En ligne	Utilisation de la distributivité dans le sens de la factorisation
$200 \times 155 = 155 \times 100 + 155 \times 100 = 1550 + 1550 =$3 100	Faux	1	En ligne	Utilisation de la distributivité dans le sens du développement
$155 \times 100 = 15500$ $155 \times 100 = 15500$ 15500 + 15500 = 31 000	Juste	3		

$\begin{cases} 155 \times 99 = 155 \times (100-1) \\ 155 \times 101 = 155 \times (100+1) \end{cases}$ $\begin{cases} 155 \times 100 - 155 \times 1 = 15\,345 \\ 155 \times 100 + 155 \times 1 = 15\,655 \end{cases}$	Juste	1	Empilement	Double utilisation de la distributivité dans le sens du développement
Sans productions	…	11	…	…

Tableau 14 - Typologie de résolution de l'exercice 2.d

Certains élèves, parmi les plus faibles et pour lesquels la régulation avait été nécessaire, ont tenté de mobiliser la distributivité dans le sens du développement en insistant systématiquement sur la décomposition additive des facteurs et en occultant parfois le calcul mental. De nombreux exemples témoignent d'une difficulté à s'extraire d'un potentiel contrat didactique qui se traduirait par l'obligation d'utiliser la distributivité dans le sens du développement dans sa lecture de gauche à droite et non pas de droite à gauche.

CR2.a et b.

Cet élève décompose tous les termes même ceux qui ne le nécessitent pas comme 2x15. Au-delà du processus qui n'est pas économique, on observe une absence de prise de conscience quant à la méthode à mettre en place.

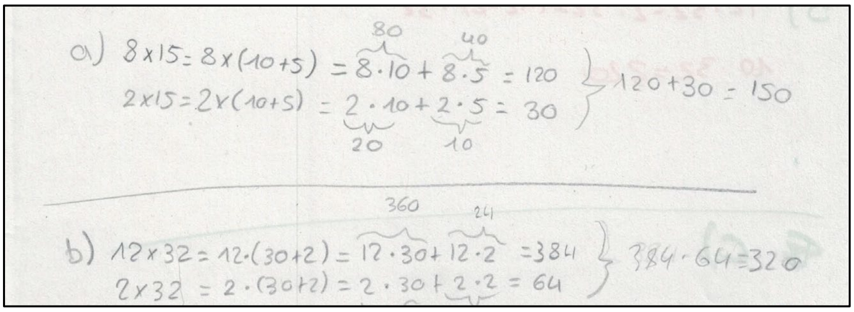


Figure 26 - exemples de résolution de l'activité CR2

3.3.3 Analyse du CR3

a. 240 x 11 =	b. 16 x 57 + 57 x 84 =	c. 997 x 25 =
d. 33 x 591 - 790 x 33 =		

Figure 27 - Exercices CR3

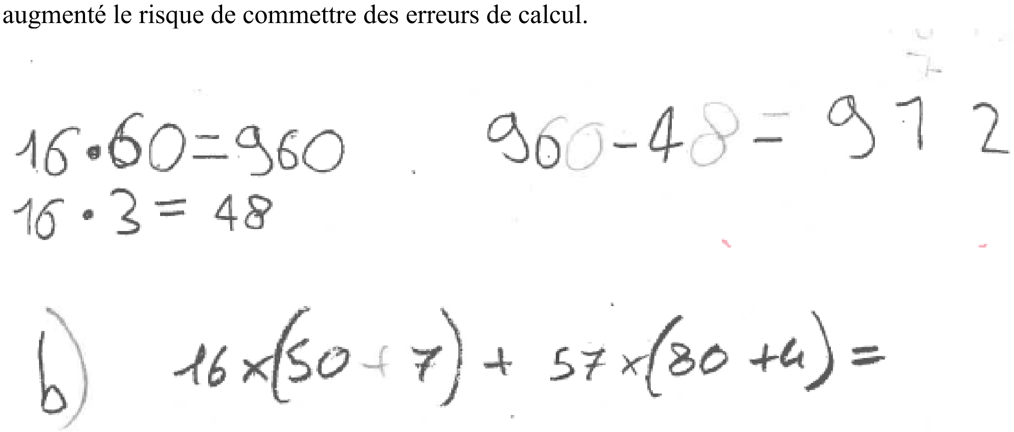
Cette activité s'est révélée être source de nombreuses difficultés pour les élèves contrairement aux deux précédentes, les performances des élèves sont inférieures.

Exercice CR3	1.a	1.b	1.c	1.d
Nombre de résultats juste	12 sur 20	9 sur 20	7 sur 20	4 sur 20

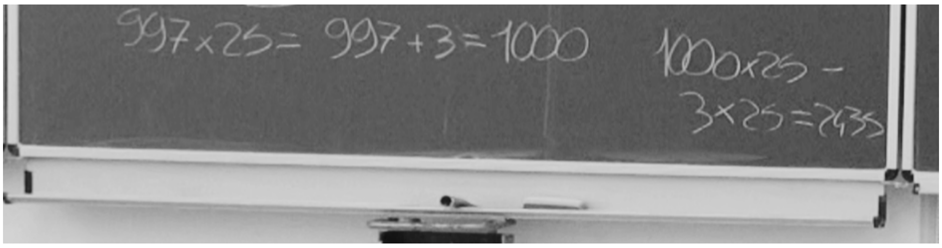
Tableau 15 - Comparatif des résultats des élèves CR3

CR3.b

La grande majorité des erreurs réside dans l'absence de la reconnaissance d'une situation où la factorisation serait la méthode la plus économique. Les élèves préférant utiliser la distributivité dans le sens du développement ce qui a potentiellement augmenté le risque de commettre des erreurs de calcul.



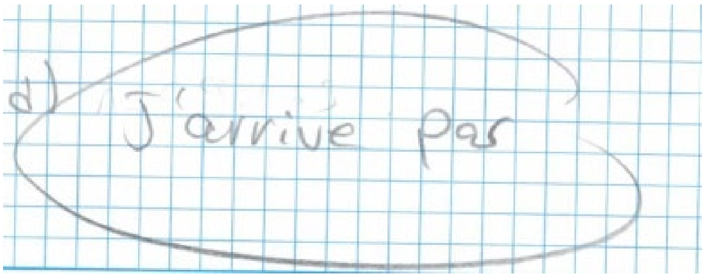
CR3.c
De nombreuses erreurs dont celles sur la différence 25000 – 75



Si le raisonnement semble bon, son exécution est problématique :

- Fausse égalité 997 x 25 = 997 + 3
- Erreur de calcul : 1000 x 25 = 2500

CR3.d
La majorité des élèves ne sont pas arrivés au bout de l'exercice, voir, ne l'ont même pas débuté.
Le taux de réussite étant de 20% en raison d'une mauvaise mobilisation des règles de calculs sur les relatifs.



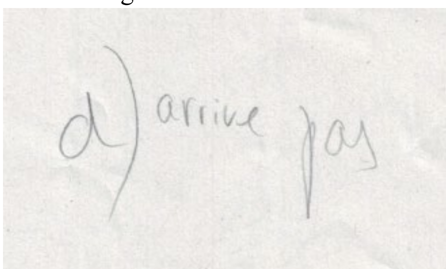


Figure 28 - Exemples de résolution de l'activité CR3

3.4 Analyse des séances 3 et 4

En conséquence des écarts survenus lors des séances 1 et 2 et d'un empiètement sur la séance 4, mais également en raison de facteurs externes à l'expérimentation, les séances 3 et 4 (annexe 2 ter) ont occupé plus de deux fois 45 minutes et sur plus de deux séances.

3.4.1 Analyse du problème CC1 S3-4 – Les carreaux colorés – Variante 1

Pour le carré de coté 6, en s'appuyant également sur les traces vidéo, seulement 8 copies sur 22 font mention d'un résultat pour le carré de côté 6. En comparaison avec le carré de côté 10 et 100, les élèves ont peu reporté la solution sur leurs copies :

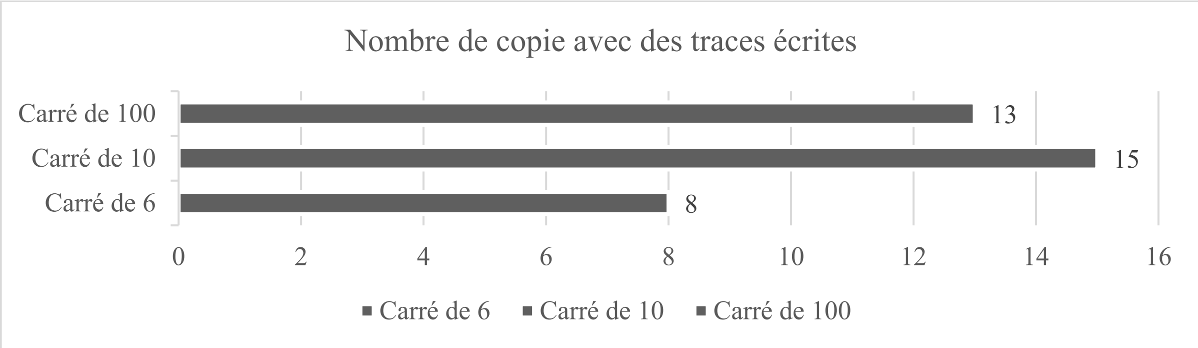


Figure 29 - Nombre de copie mentionnant un résultat selon le type de carré

Au moins 6 élèves sur 22 ont commis des erreurs, probablement liées aux effets d'un contrat didactique de type arithmétique (avec les exercices sur le calcul réfléchi, on a fait des opérations alors on doit faire des opérations) :

- « 36 CC,[11] car 6x6 = 36 » pour le carré de coté 6 ;
- « 24 CC », résultat de 4 x 6.

Rapidement, les élèves arrivent à trouver et formuler le bon résultat « 20 CC ».

Activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ a.

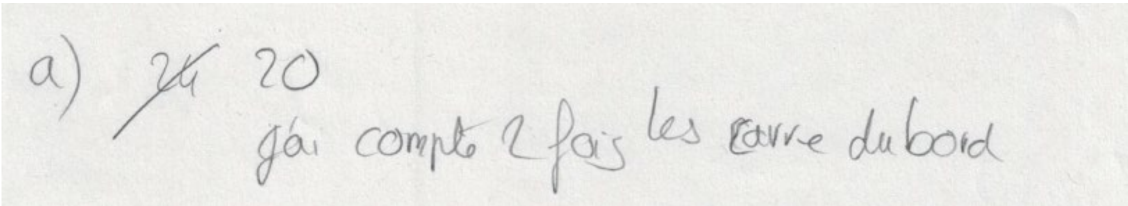


Figure 30 - Extrait de la copie d'un élève lors de la séance 3

Pour autant, ce résultat n'apparait pas dans toutes les traces écrites des élèves. Pour le carré de coté 10, non représentés graphiquement, rappelons que selon l'analyse a priori du problème, les élèves disposent de 3 stratégies allant du comptage des CC à l'aide d'un croquis à réaliser (stratégie D), en passant par le fait que l'on peut ajouter 4 CC (stratégie R) pour chaque nouvelle taille du carré, à l'identification de patterns (stratégie P) :

[11] CC : Carreaux colorés

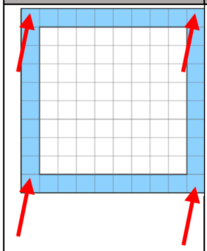
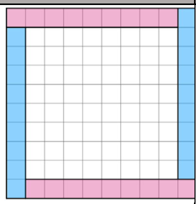
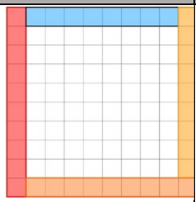
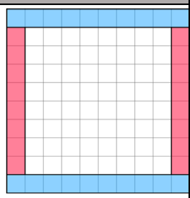
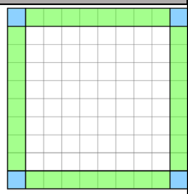
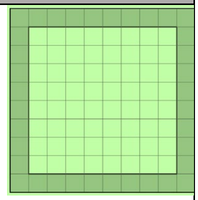
Pattern P1	Pattern P2	Pattern P3	Pattern P4	Pattern P5	Pattern P6
					
$\mathbf{4 \times 10 - 4}$	$\mathbf{4 \times (10-1)}$	$\mathbf{10 + 2{\times}9 + 8}$	$\mathbf{2 \times 10 + 2 \times 8}$	$\mathbf{4 \times (10 - 2) + 4}$	$\mathbf{10^2 - 8^2}$

Figure 31 - Récapitulatif des différents patterns de la Stratégie P

L'analyse montre l'absence d'autres croquis, plus précisément des carrés de tailles intermédiaires à 6 et 10, ainsi que celui de 10 dans le cadre d'une stratégie de comptage, mais également une absence de traces écrites mettant en évidence une relation numérique sur le nombre de carreaux colorés entre les carrés de taille 6 à 7, 7 à 8, …

La résolution du carré de côté 10 a exclusivement été générée par la mise en évidence de patterns :

- 15 élèves (EL) sur 22 ont découvert au moins un pattern sur six ;
- 5 élèves ont identifié au moins deux patterns.

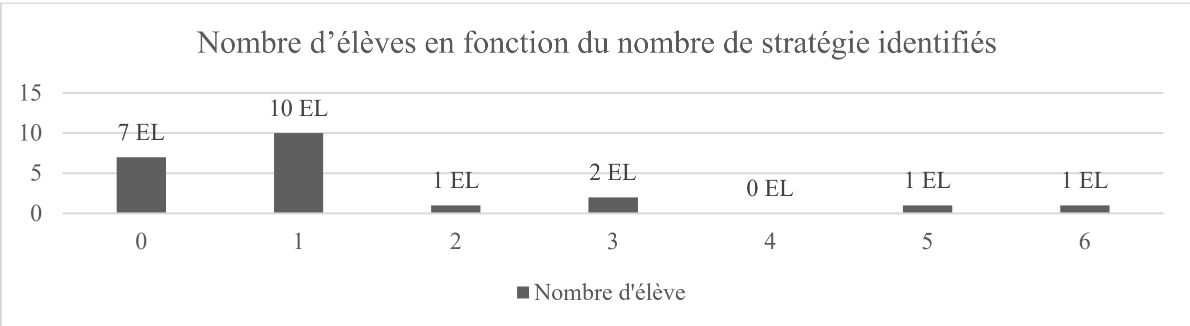


Figure 32 - Nombre d'élèves en fonction du nombre de stratégies identifié

Tous les patterns n'ont pas été mobilisés de façon équitable par les élèves. Le pattern P1 domine tous les autres suivis par les patterns P4 et P6 (ex aquo) :

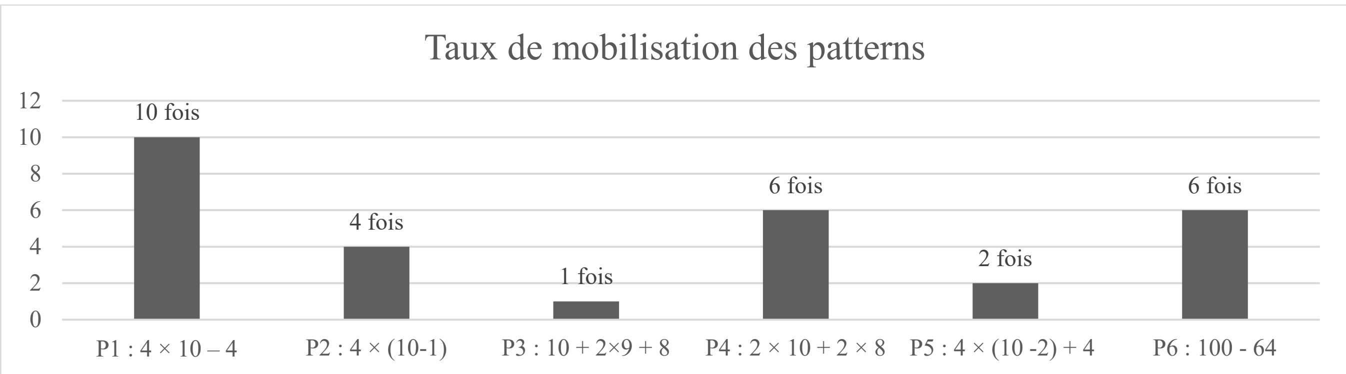


Figure 33 - Fréquence d'apparition des différents patterns

On peut s'interroger sur les raisons de ce résultat, car si le choix du pattern 6 peut s'expliquer par le fait qu'il peut faire référence à des pratiques déjà abordées précédemment dans le chapitre « Lignes et surfaces » en vertu de propriétés liées aux aires, il n'est pas de même pour les deux autres. La fréquence d'apparition de P1 peut prendre ses racines dans les erreurs commises pour le carré de 6 et la réponse erronée 4 x 6 et la nécessité de retrancher les carreaux comptés deux fois. De plus, notons qu'un élève a proposé deux stratégies, exprimées dans le langage algébrique, non anticipées dans notre analyse a priori :

Activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ c.

X = nombre de careaux par côté
Y = nombre de côté

Stratégie alternative n°1 :

$6|X \cdot 3 + (X - Y)$ $10 \cdot 3 + (10 \cdot 4) = 36$

Stratégie alternative n°2 :

$8|X - [X-2]| \cdot ([X-2] + X)$

Figure 34 - Deux formules absentes de l'analyse a priori

Le passage au carré de 100 s'est déroulé assez naturellement, les élèves ayant réinvesti le travail sur les patterns appliqués au carré de 10. Nous n'avons pas constaté la mobilisation de la proportionnalité, que la variable didactique « carré de côté 100 », après étude du carré de coté 10, aurait pu induire. Au-delà de l'identification des patterns, les élèves ont été capables de produire des formules.

	Pas de formulation	**Formulation**
Nombre de copies	11	11

Tableau 16 - Nombre de production avec ou sans formulation

Une analyse plus fine à l'aide des critères établis dans le paragraphe 4.2, permet d'obtenir le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique (carré de 6)	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
CC1 $_{S3}$			15	3	5	0	8

Tableau 17 - Production d'élèves selon la grille d'analyse

Peu d'élèves ont essayé d'expliquer en langage naturel leur façon de faire, quand d'autres proposent des méthodes de calcul qui font appel soit à des abréviations soit à des variables, parfois deux variables, car ils n'ont pas vu la relation les reliant. Chacune de ces trois formules exprimées en langage naturel est formulée selon une structure distincte :

CC1 $_{S3\text{-}4}$ **c.**

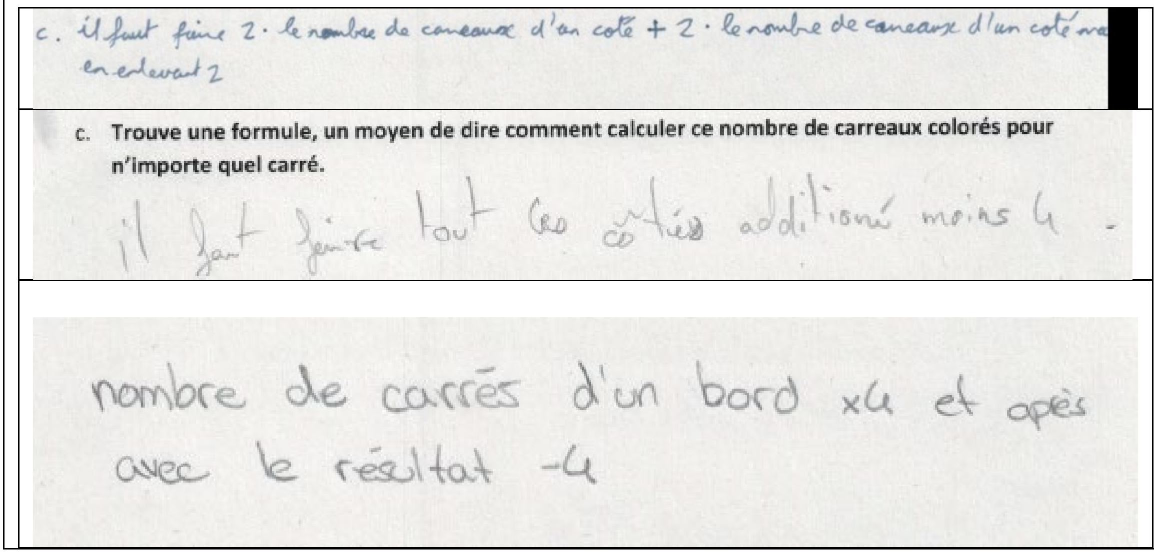


Figure 35 - Exemples de formules exprimées à l'aide du langage naturel

Seulement 2 copies font mention d'un processus intermédiaire, entre l'usage du langage naturel et la modélisation en langage algébrique. À l'aide d'abréviations :

- NC représentant le nombre de carrés colorés sur un côté du carré
- NCT représentant le nombre total de carrés colorés.

CC1 $_{S3\text{-}4}$ **c.**

Notons que sur cette copie, les variables NC et NCT ne sont pas explicitées.
La réponse présente également une fausse égalité : NC – 1 = NC – 1 × 4

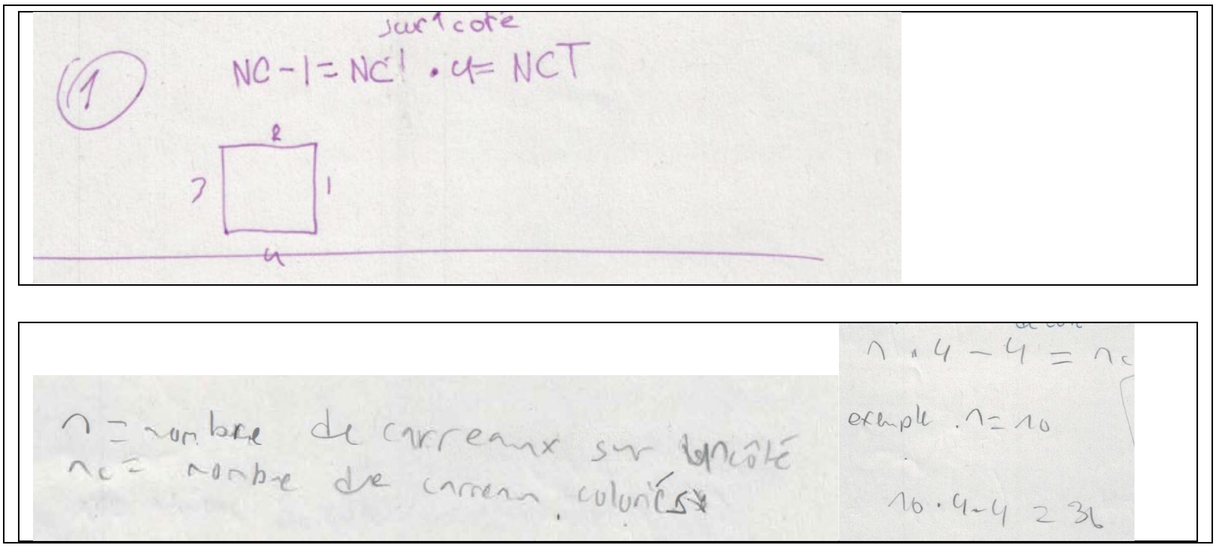


Figure 36 - Exemples de formules exprimées à l'aide d'abréviation

Enfin, six copies d'élèves faisaient apparaitre l'usage de la lettre pour lequel nous avons réalisé la synthèse suivante :

Copie	Formule (tel qu'écrit sur la copie)	Stratégie	Commentaires
N°7	$x \times 4 = y$ $y - 4 = z$	P1	• 1 formule • 3 lettres et 2 variables x et y • Absence de la définition des variables • Formule en 2 parties
N°8	1re formule $P^2 - (P-2)^2$ 2de formule $v - 1 = w$ $w \times 4 = r$	P2 et P6	• 2 formules • 1 lettre -variable (P) • Absence de la définition de la variable • 2de formule (voir copie N°7)
N°11	$(x \times y) - 4$	P1	• 1 formule • 2 lettres variables x et y • Absence de la définition des variables
N°16	1) $(n \times 2) + (n-2) \times 2$ 2) $n \times n - (n-2)^2$ 3) $n \times 4 - 4$ 4) $(n-1) \cdot 4$	P1 ; P2 ; P4 ; P6	• 4 formules • 1 lettre variable x • Absence de la définition de la variable
N°17	1) $x \cdot y - y$ 2) $x \cdot x - (x-2)^2$ 3) $x \cdot 2 + ([x-2] \cdot 2)$ 4) $(x-1) \cdot y$ 5) $(x-2) \cdot y + y$ 6) $x \cdot 3 + (x - y)$ 7) $x + 2 \cdot (x-1) + (x-2)$ 8) $(x - [x-2]) \cdot ([x-2] + x)$ x = nombre de carreau par coté y = nombre de côté	P1 ; P2 ; P3 ; P4 ; P5 ; P6 et plus encore	• 8 formules • 2 lettres variables x et y • Définition des variables.
N°21	$n = nombre\ de\ carreaux\ sur\ 1\ coté,$ $nc = nombre\ de\ carreaux\ colorés$ $n \cdot 4 - 4 = nc$	P1	• 1 lettre-variable, 1 abréviation • Définition des abréviations et des variables.

Tableau 18 - Exemples de formules exprimées à l'aide de variables

Ce qui est notable, c'est que bien qu'il n'était pas nécessaire de recourir à l'écriture littérale pour répondre à la question c. de l'activité $CC1_{S3\text{-}4}$, plus de la moitié des élèves ayant répondu à cette question ont introduit la lettre en tant que variable. Parmi les six copies précédemment mentionnées, cinq montrent un processus de validation à l'aide des cas 10 et 100. L'exemple le plus flagrant étant la copie d'un élève en particulier :

CC1 **S3-4** **c.**

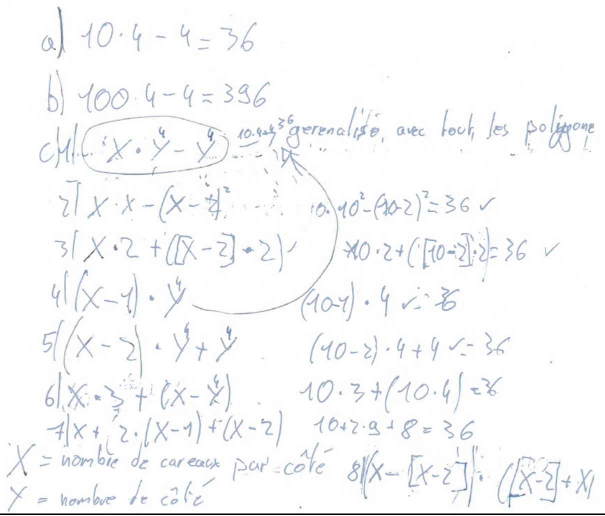


Figure 37 - Exemples de production mettant en avant un processus de justification lors de la séance 3

Après avoir travaillé, lors de la séance 3', sur la détermination des six patterns, nous avons abordé les différents moyens existant pour exprimer une formule. La lettre est apparue rapidement et sous différentes formes :

- La lettre « x » comme « un moyen d'englober un ensemble nombres » ;
- La lettre comme ensemble de nombres : ℤ et ℝ ;
- Au travers de la formule E=MC^2 ;
- Au travers de la formule de la vitesse $v = \frac{d}{t}$.

La détermination des formules s'est principalement déroulée lors de la séance 3''. L'analyse met en évidence une évolution des pratiques, et plus particulièrement pour les élèves qui n'avaient rien produit lors de la séance 3.

	Pas de formulation	Formulation
Séance 3	11	11
Séance 3''	3	18

Tableau 19 - Production de formule entre les séances 3 et 3'

En observant plus finement, nous montrons une évolution, naturelle, de la situation par rapport à la séance 3 :

Pensée arithmétique — Début de la pensée algébrique — Pensée algébrique

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique (carré de 6)	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
CC1 $_{S3}$			15	3	5	0	8
CC1 $_{S3''}$			22	9	9	1	11

Tableau 20 - Grille d'analyse de la production d'élèves des activités CC1

La moitié des productions montre des signes avancés d'une pensée algébrique au travers de la modélisation de la situation en langage algébrique quand l'autre moitié emploie le langage naturel. Pourtant, la progression vers le langage naturel est plus importante comparée à celle sur le langage algébrique. Lors de la mise en commun, nous avons sollicité les élèves ayant exprimé la formule en langage naturel afin de les faire travailler sur une formulation plus économique.

Activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ c.

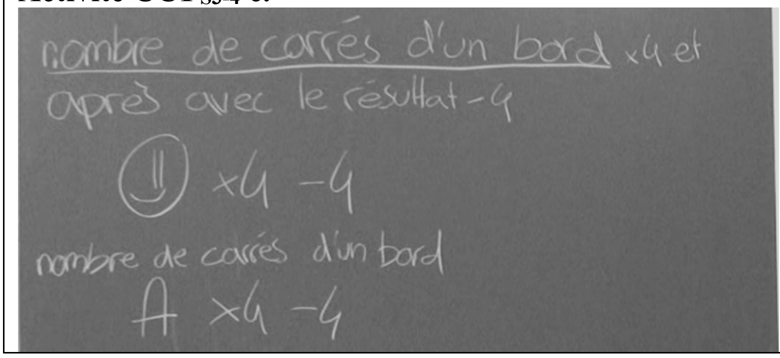


Figure 38 - Du langage naturel à la formule – Mise en commun séance 3'

Cependant, ce passage du langage naturel à la lettre s'est révélé délicat au moment de mobiliser la priorité des opérations et les parenthèses ainsi qu'un éventuel processus de vérification :

Activité CC1 $_{S3\text{-}4}$ c.

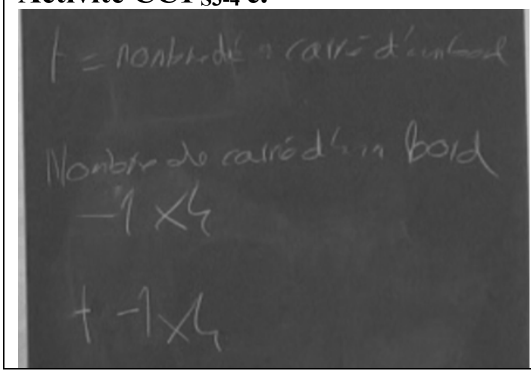


Figure 39 - Exemple de l'absence de la mobilisation de la priorité des opérations

L’activité prend fin durant la séance 4 sur le travail sur l’équivalence des formules. Cela a permis de remobiliser la distributivité sans grandes difficultés.
Nous avons même observé plusieurs usages de la distributivité comme technique de réduction des expressions littérales :

Activité CC1 S3-4 **c.**

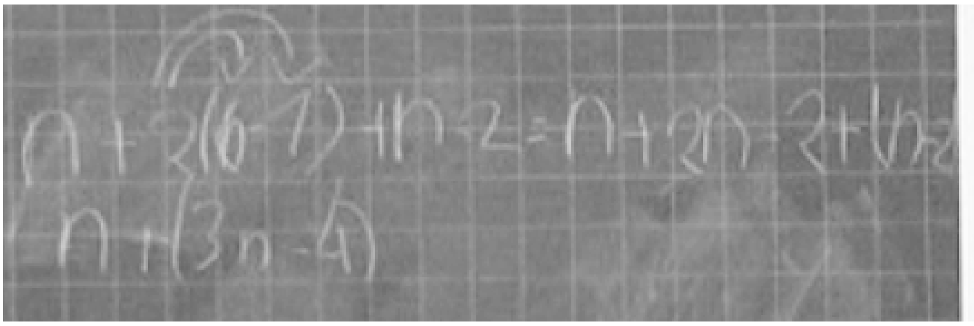


Figure 40 - Usage de la distributivité CC2

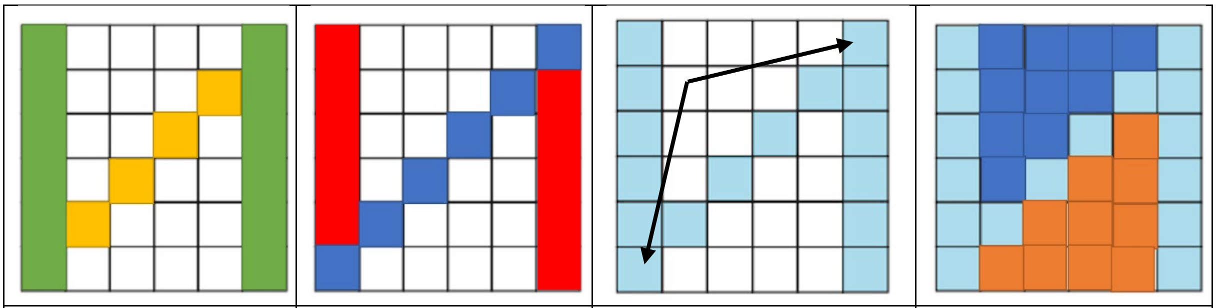
La dernière question sur l’aspect structurel a été résolue rapidement.
Les élèves avaient une bonne connaissance de la définition d’un multiple de 4 :

- « Un nombre dans la table de 4 » ;
- « Un nombre qui se divise par 4 » ;
- « Un nombre qui se divise par 4 et qui est un nombre entier » .

3.4.2 Analyse du problème CC1 S3-4 – Les carreaux colorés – Variante 1

Ce problème se distingue du précédent par son design. Les élèves devant prendre à leurs charges les éventuelles étapes intermédiaires. Le comptage des carreaux colorés pour le carré de 6 a été légitimement réalisé et ce dans les mêmes proportions que pour l’activité précédente (9 sur 23 vs 8 sur 23). Nous n’avons pas observé d’essais sur un carré de 10 avant le travail sur la formule. Parmi les 4 patterns possibles, la fréquence d’apparition du pattern P3’ est la plus importante, résultant probablement de la transposition du pattern P1 du problème CC1.

Pattern P1’	Pattern P2’	Pattern P3’	Pattern P4’



6	3	13	2

Figure 41 - Patterns problème CC2

En l'absence de question intermédiaire, la découverte des patterns a été plus rapide que lors de l'activité CC1. Une analyse plus fine à l'aide des critères établis dans le paragraphe 4.2, permet d'obtenir les résultats ci-dessous :

Pensée arithmétique — Début de la pensée algébrique — Pensée algébrique

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique (carré de 6)	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
$CC1_{S3}$			15 (sur 22)	3	5	0	8
$CC1_{S3''}$			22 (sur 22)	9	9	1	11
$CC2_{S4}$			13 (sur 23)	1	2	0	18

Tableau 21 - Grille d'analyse de la production d'élèves des activités CC1 et CC2

De façon notable, l'usage de la lettre est apparu comme une nécessité par les élèves (78%) dont 57% de production exacte. Enfin, notons que la mise en commun a mis à nouveau en avant des problématiques liées à la priorité des opérations et l'usage des parenthèses :

Activité CC2 $_{S3-4}$.

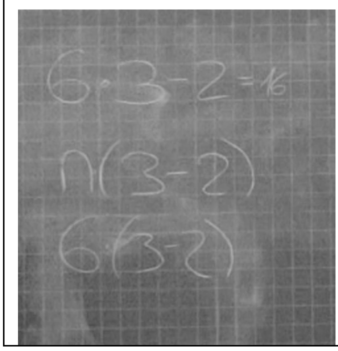


Figure 42 - Non-usage du calcul parenthèse – activité CC2

3.5 Analyse des séances 5 et 6

En raison du dépassement du temps alloué à l'expérimentation, la séance 6 n'a pas eu lieu. La séance 5 s'est déroulée à la faveur d'un remplacement, mais dans des conditions d'expérimentation dégradée (1 enseignant – des taches à réaliser en amont). Seuls les deux premiers programmes de calculs ont été réalisés en classe.

3.5.1 Analyse des programmes PC1 et PC2

La séance a débuté par une prise en charge de l'activité et la lecture de l'énoncé par nos soins afin d'assurer la bonne compréhension de la notion de PC. Cette façon de faire s'est avérée nécessaire, car l'exemple réalisé par un élève à l'oral a permis d'identifier que pour certains « ajouter » 8 au nombre 40 amène à transformer 40 en 408. Les élèves étaient à nouveau réellement engagés dans l'activité, s'appropriant facilement les PC (les tests sont réalisés avec plus de deux nombres choisis au départ et les conjectures identifiées par pratiquement toute la classe), pour autant nous remarquons quelques lenteurs quant au calcul mental nécessaire lors du test des PC. La synthèse des productions à l'aide des critères ci-dessous, nous permet de dire que l'usage de la lettre est mobilisé pour généraliser les programmes de calculs même si cette mobilisation est moindre par rapport au problème CC2$_{S4}$.

Pensée arithmétique — Début de la pensée algébrique — Pensée algébrique

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique (carré de 6)	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
CC1$_{S3}$			15 (sur 22 élèves)	3	5	0	8
CC1$_{S3''}$			22 (sur 22 élèves)	9	9	1	11
CC2$_{S4}$			13 (sur 23 élèves)	1	2	0	18
PC1			--- (sur 24 élèves)	5	---	0	15
PC2			--- (sur 24 élèves)	1	---	0	16

Tableau 22 - Grille d'analyse de la production d'élèves des activités PC1

Les deux premières questions nous ont permis d'observer si les élèves s'appropriaient facilement les programmes de calcul et s'ils arrivaient à émettre une conjecture. Par le biais de la question c, nous avons pu observer comment les élèves ont interprété la notion de preuve et comment ils ont utilisé la lettre dans le cadre du problème posé. Cette observation nous a permis de classer leur raisonnement en fonction de la typologie de Balacheff :

PC	Absence de preuve	Preuve pragmatique	Preuve intellectuelle

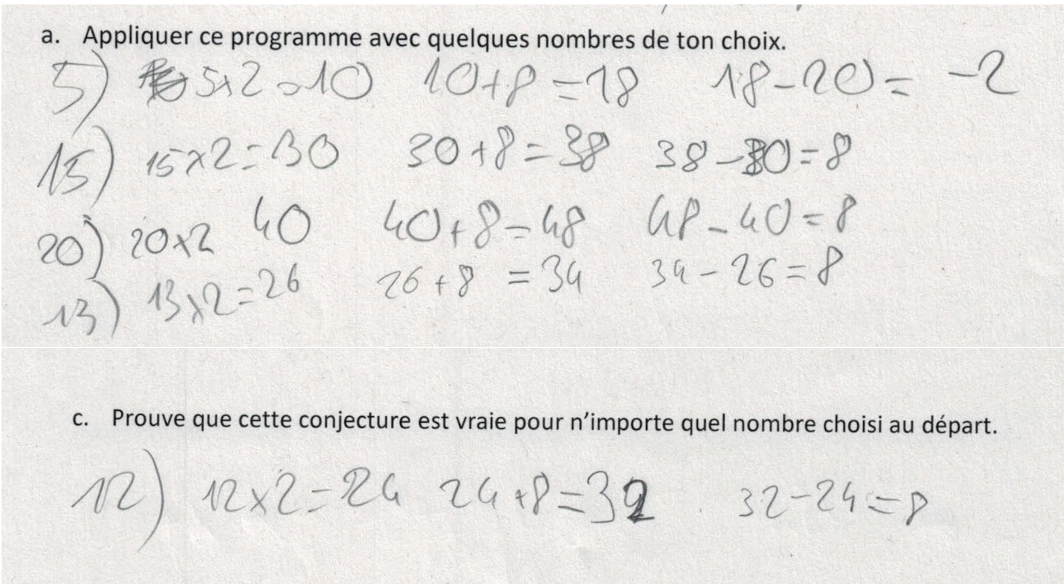
		L'empirisme naïf	L'expérience cruciale	L'exemple générique	L'expérience mentale	Le calcul sur les énoncés	La démonstration en mobilisant la distributivité dans le cadre algébrique
PC1	10	2		1	4		7
PC2	10	1			5		8

Tableau 23 - Typologie de preuve PC1 et PC2

Plus de 40% des élèves présents n'ont pas fourni de preuve, ce qui est un nombre important. Cette situation peut être expliquée par l'organisation pédagogique et didactique de la séquence. Un travail en groupe aurait probablement donné de meilleurs résultats. De plus l'absence d'un contrat didactique autorisant le débat lors des résolutions de problèmes, a probablement contribué aux difficultés rencontrées par les élèves. Effectivement, pour parvenir à une preuve, qui est à la fois un processus et un produit, les élèves doivent réaliser deux sauts conceptuels essentiels. Ces sauts les obligent à modéliser la situation et à adopter une approche réflexive au travers d'un débat (intérieur ou entre pairs), ce qui leur permet de passer d'un point de vue pratique à un point de vue théorique. Malgré un faible taux de production de preuves, nous constatons que sur les 28 produites, seulement quatre sont des preuves pragmatiques et 24 sont des preuves intellectuelles dont voici quelques représentations :

<u>L'empirisme naïf</u>

PC1 : Cette élève se contente de rajouter un calculs à ses quatre précédents pour se convaincre de la véracité de sa conjecture.


a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix.

5) 5×2=10 10+8=18 18-20=-2

15) 15×2=30 30+8=38 38-30=8

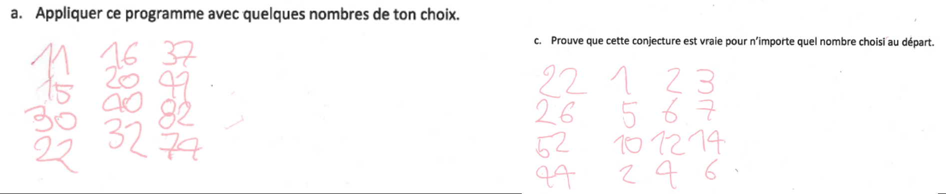
20) 20×2 40 40+8=48 48-40=8

13) 13×2=26 26+8=34 34-26=8

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

12) 12×2=24 24+8=32 32-24=8

Idem pour le PC2 : Cette élève utilise depuis le début des valeurs « complexes », on pourrait envisager un glissement vers un empirisme crucial


a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix.

11 16 37
15 20 41
30 40 82
22 32 74

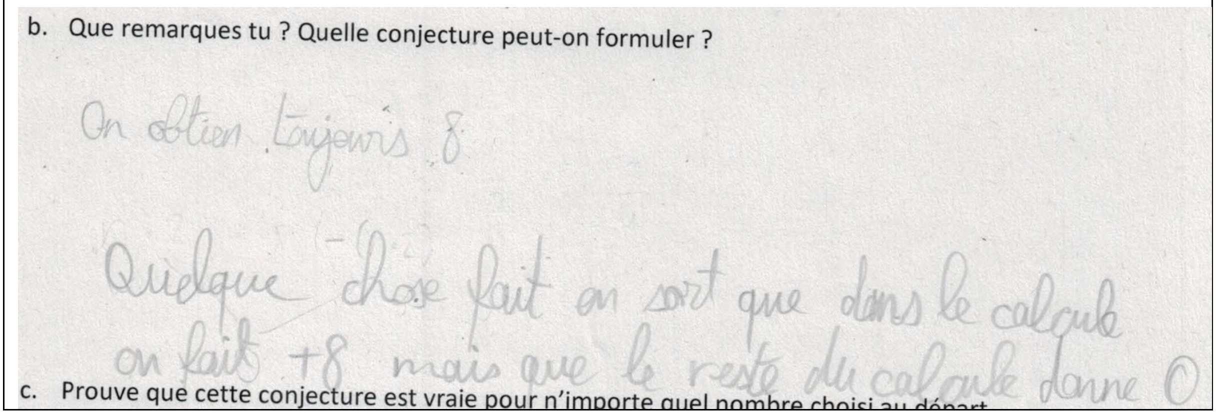
c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

22 1 2 3
26 5 6 7
52 10 12 14
44 2 4 6

Figure 43- Exemple d'empirisme naif

L'exemple générique

PC1 : Cette élève formule la preuve dans la question b. et non dans la question c.


b. Que remarques tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ?

On obtien toujours 8

Quelque chose fait en sort que dans le calcule on fait +8 mais que le reste du calcule donne 0

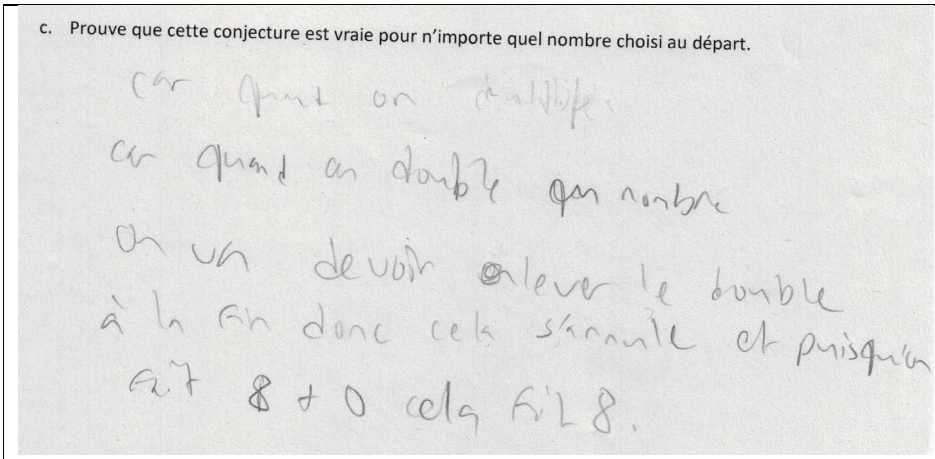
c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ

Figure 44 - Exemple d'empirisme générique

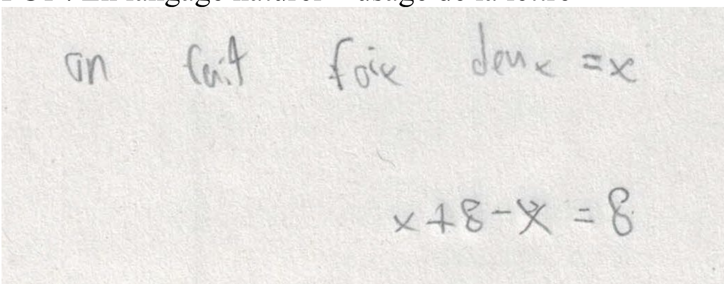
L'expérience mentale

Nous avons pu observer trois types de preuves relevant de l'expérience mentale : La production de la preuve est réalisée soit à l'aide du langage naturel, soit à l'aide d'une expression littérale ou un mélange des deux :

PC1 : Exclusivement en langage naturel



PC1 : En langage naturel + usage de la lettre



PC1 : à l'aide de la lettre

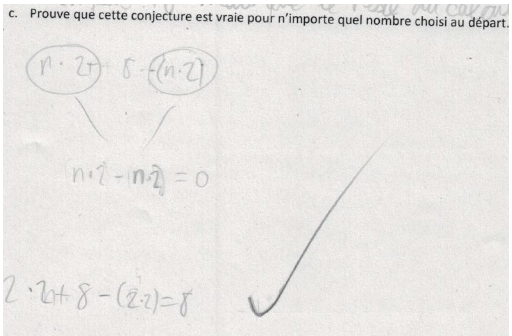
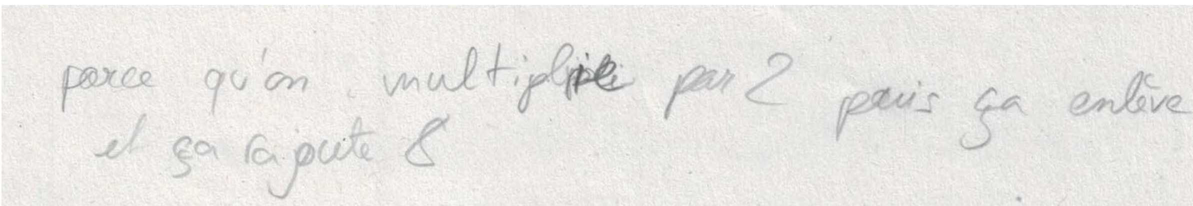
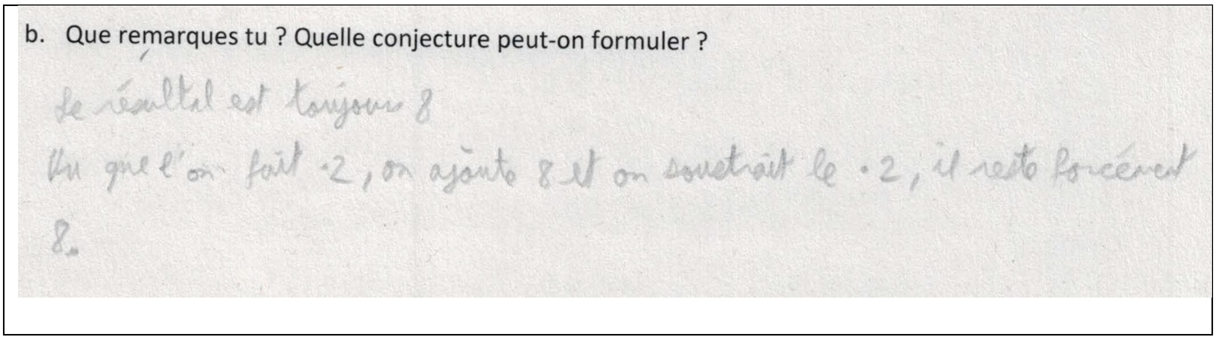


Figure 45 - Exemples de représentation de l'expérience mentale.

La faiblesse du nombre d'expressions des formules en langage naturel nous a questionné sur une éventuelle étape intermédiaire entre la question b. portant sur la conjecture, et la question c. sur la preuve, comme nous l'avions remarqué précédemment. Nous avons donc identifié deux autres preuves se trouvant dans la question b. et exclusivement en langage naturel.

PC1 b.





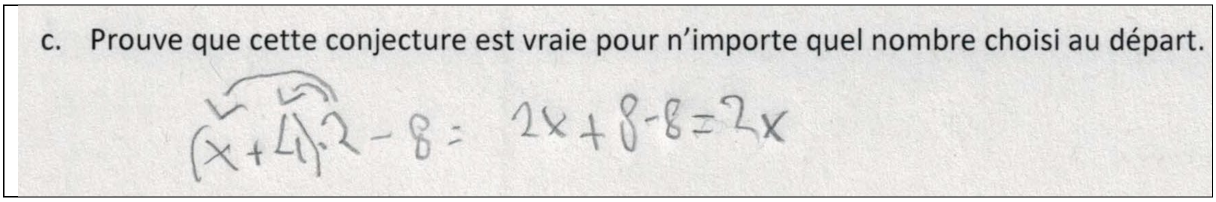
b. Que remarques tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ?

Le résultat est toujours 8
Vu que l'on fait ·2, on ajoute 8 et on soustrait le ·2, il reste forcément 8.

Figure 46 - Exemple de preuve

Dans l'analyse du PC 2, nous abordons les productions sous le spectre de l'utilisation de la distributivité pour transformer la formule générale et aboutir à un expression de la conjecture. La difficulté résultant de la représentation structurale du double d'un nombre entier.

Sur les 16 copies mobilisant le langage algébrique, 8 utilisent la distributivité comme l'outil adéquat permettant de manipuler l'expression du programme de calcul afin de la réduire et la simplifier pour faire apparaitre l'expression de la conjecture.

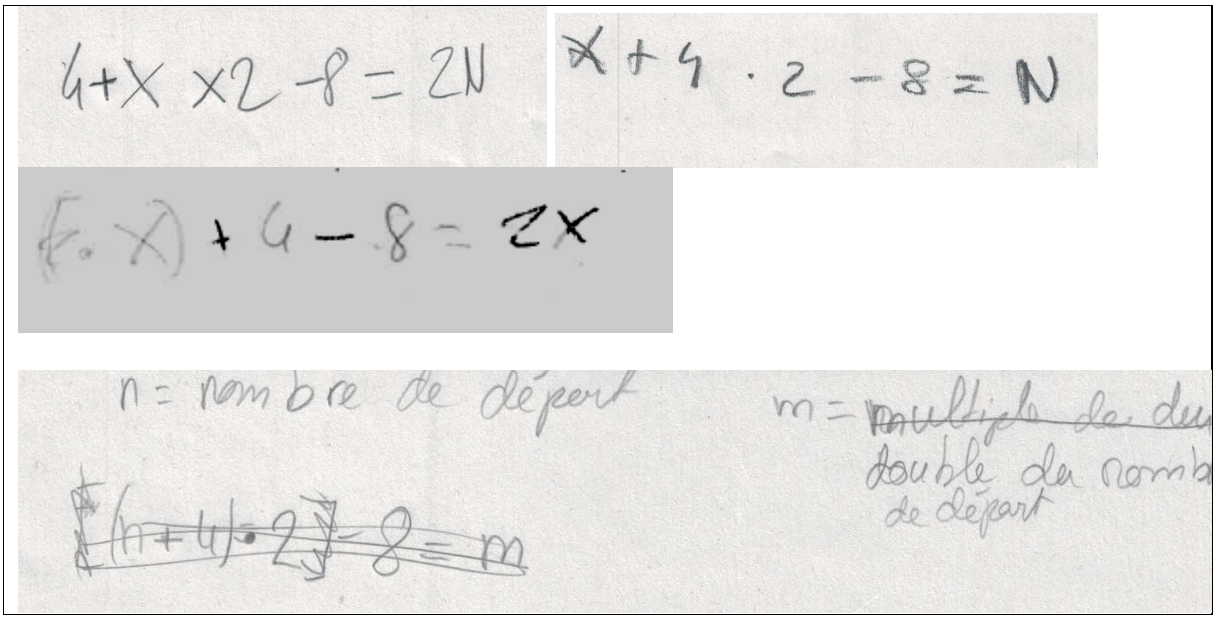


c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

$(x+4)\cdot 2-8= 2x+8-8=2x$

Figure 47 - Exemple de démonstration PC1

A contrario, les autres élèves ont cherché à exprimer la conjecture comme équivalente à l'expression du programme de calcul sans la justifier :



$4+X \times 2-8=2N$

$x+4\cdot 2-8=N$

$(2\cdot x)+4-8=2x$

n = nombre de départ

m = ~~multiple de deu~~ double du nomb de départ

$\cancel{[(n+4)\cdot 2]-8=m}$

Figure 48 -

Ce faisant les élèves montrent ainsi qu'ils ont compris la relation qui liait la formule générale du programme de calcul et l'expression littérale des nombres pairs, mais qu'ils ont été dans l'incapacité de transformer l'une pour arriver à l'autre.

3.6 Analyse de l'évaluation

Le déroulement de l'évaluation a été conforme au plan initial. Elle a eu lieu le 01 juin 2022 sur une période de 45 minutes.

3.6.1 Exercices de calculs réfléchis (Eval. CR1)

L'activité est notée sur 4 points, 1 point pour chacun des 4 calculs réfléchis. La moyenne de la classe est de 3,43 sur 4 (ou 5,15 sur 6). Une analyse plus fine du taux de réussite pour chacun des calculs est présentée ci-dessous :

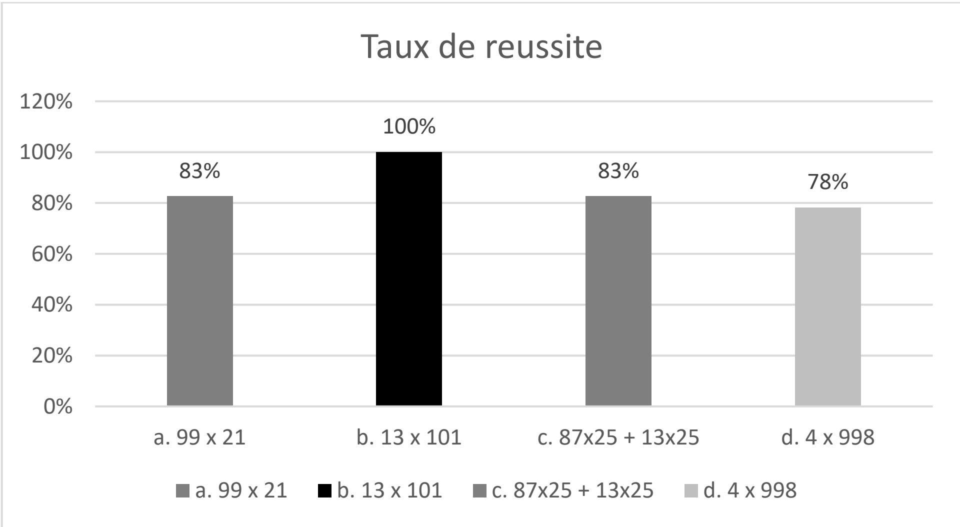


Figure 49 - Taux de réussite de l'exercice Eval. CR1

Au regard de l'analyse a priori des activités des séances 1 et 2, on peut mettre en évidence les savoir-faire suivants :

- Le type d'écriture : en ligne ;
- L'usage des parenthèses (priorité des opérations) ;
- L'utilisation de la commutativité : 99 x 21 devenant 21 x 99 ;
- L'usage de la distributivité ;
- La reconnaissance dans les termes d'une somme d'un facteur commun afin de factoriser.

La présence de ces savoir-faire dans les productions est représentée ci-dessous (fig. 50) :

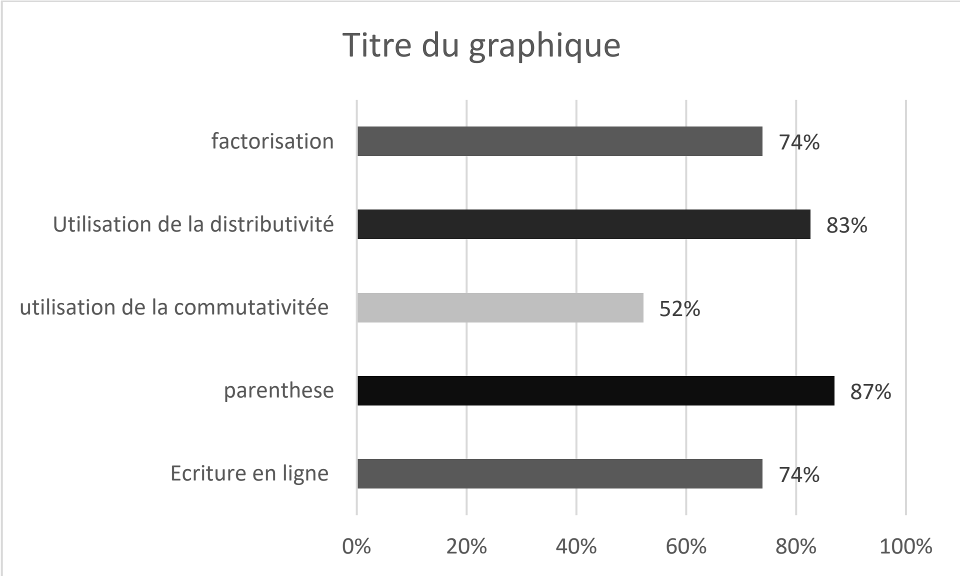


Figure 50 - Taux de réussite des savoir-faire

3.6.2 Problème de généralisation (Eval. PG1)

La moyenne de la classe est de 2.5 sur 4. La détermination du nombre de cubes à l'étape 2 et 3 (100% de réussite) n'a pas posé de problème aux élèves, ainsi que pour l'étape 20 avec 91% de réussite. Nous observons que lors de cette évaluation la mobilisation du langage algébrique a été généralisée à pratiquement toute la classe.

Le tableau ci-dessous reprend les critères établis dans le paragraphe 4.2.

Pensée arithmétique — Début de la pensée algébrique — Pensée algébrique

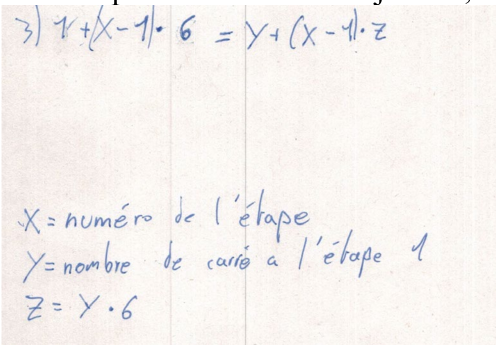
	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique (carré de 6)	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
CC1 - S3			15 (sur 22)	3	5	0	8
CC1 - S3''			---	9	9	1	11
CC2			13 sur 23	1	2	0	18
Eval. PG1			19 sur 23	3	1	3	20

Tableau 24 -Grille d'analyse de la production d'élèves des activités Eval. PG1

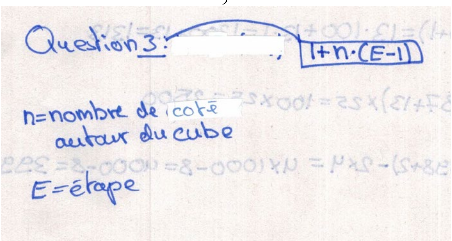
Pour autant, l'exécution de cette modélisation a été plus délicate avec un score de 54% de réussite. Les difficultés sont représentées par l'usage de multiples variables souvent inutiles :

Variables inutiles :

Dans ce problème Y vaut toujours 1, n'est donc pas une variable.



Formule correcte, mais décontextualisée :



Confusion dans la définition des variables :

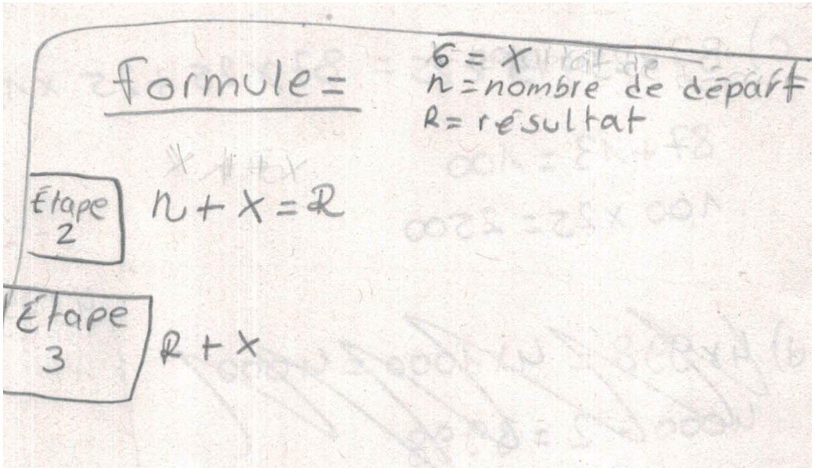


Figure 51 - Exemples de production Eval. PG1

3.6.3 Programme de calcul (Eval. PC1)

La moyenne de la classe est de 2.5 points sur 4 (3.75 sur 6). La classe obtient de bons résultats sur les essais (moyenne de 0,98 point sur 1) ainsi que sur la détermination de la conjecture (moyenne de 0.43 point sur 0.5). De même, la modélisation a été correctement réalisée par 14 élèves sur 23. A contrario, seulement 7 élèves ont mobilisé la distributivité, dont trois correctement afin d'arriver à un résultat cohérent avec la conjecture. Malgré les difficultés rencontrées, nous constatons une évolution positive de la pratique des élèves quant à la mobilisation de la lettre et la production de formule à l'aide du langage algébrique.

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
PC1			--- (sur 22 élèves)	5	---	0	15
PC2			--- (sur 22 élèves)	1	---	0	16
Eval. PC1			---	3	---	3	20

Tableau 25 - Grille d'analyse de la production d'élèves des activités Eval. PC1

La faible moyenne de la classe résulte du poids des types de preuves :

PC	Absence de preuve	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle		
		L'empirisme naïf	L'expérience cruciale	L'exemple générique	L'expérience mentale	Le calcul sur les énoncés	La démonstration en mobilisant la distributivité dans le cadre algébrique
PC1	10	2		1	4		7
PC2	10	1			5		8
Eval. PC1	1	4			10		8 (dont 4 correctement)

Tableau 26 - Typologie de preuve Eval. PC1

Nous avons décidé de nous pencher sur les réalisations qui comportent des preuves de type "l'expérience mentale". En effet si nous observons un recours systématique à la lettre dans les preuves du types « l'expérience mentale », nous constatons, comme nous l'avions constaté lors de l'analyse des programmes de calculs PC1 et PC2, que pour certains élèves, ce recours suffit à prouver. Cela se manifeste par le fait qu'un grand nombre d'élèves cherchent à tout prix à établir l'équivalence (n·2 + 5)·2-n·3-10 = n en adoptant une approche que nous pourrions qualifier d' "expérience mentale naïve". Référence à la psychologie naïve basée sur un pouvoir prédictif important, les élèves semblent prédire, de manière non mathématique ou en inventant des propriétés inexistantes, ce que sera l'expression littérale non réduite, (n·2 + 5)·2-n·3-10, après réduction et simplification. Cette méthode se retrouve dans un nombre important de réalisations (10). Nous n'avons pas suffisamment d'éléments pour proposer une explication, mais il semble que cela relève d'un contrat didactique sous-jacent. Pour d'autres, la simple écriture, sans justification, de l'équivalence ne suffit pas, ils vont donc mobiliser la distributivité de façon incorrecte et manipuler l'expression pour arriver à un résultat correct que nous qualifierons de "fausse démonstration".

Expérience mentale naïve

$$3\cdot[((n\cdot 2)+5)\cdot 2]-(3\cdot n)-10=n$$

$$(n\cdot 2+5)\cdot 2-n\cdot 3-10=n$$

Fausse démonstration :

Manipulation des termes : 2x – 3x devient 3x – 2x

$$2n+5\cdot 2-3n-10=n$$

$$2n-3n=1n$$

$$(n[\cdot 2+5])\cdot 2-(n\cdot 3)[-10]=n\cdot 2-(n\cdot 3)=n\cdot 3-n\cdot 2$$

$$10-10=0 \qquad 3n-2n=\underline{\underline{1n}}$$

$$3)\ (x\cdot 2+5)\cdot 2-x\cdot 3-10=x\cdot 2+5\cdot 2-x\cdot 3-10=x\cdot 3-x\cdot 2+5\cdot 2-10=$$

$$3x-2x+10-10=3x-2x+0=3x-2x=\underline{\underline{1x}}$$

Figure 52 - Exemple de preuve du type Expérience mentale naïve

3.6.4 Programme de calcul (Eval. PC2)

La moyenne de la classe est de 2.3pts sur 4pts. À l'image de l'exercice 3, les tests ont été effectués correctement par tous. La conjecture a posé plus de soucis que lors de l'exercice précédent avec une moyenne de 0.60 sur 1 (vs 0.83 sur 1).

Absence de conjecture	Conjecture exotique	Il n'existe pas de conjecture	Multiple de 6	Multiple de 3	3 (n+1)
4	1	2	1	4	11

Tableau 27 – Typologie des conjectures Eval. PC2

La recherche de cette conjecture à générer plus de test du PC que précédemment :

Moyenne d'essai du PC exercice 3	Moyenne d'essai du PC exercice 4
3	3.5

Tableau 28 – Fréquences des essais Eval. PC2

De plus, la modélisation de la somme de trois nombres entiers consécutifs a été moins bien réalisée, la moitié des élèves mobilisant plus d'une variable ce qui implique une moyenne 0.7 sur 2 à cette question.

Nous avons remarqué pour la première fois une tendance négative dans la façon dont les élèves mobilisent la lettre et créent des formules en utilisant le langage algébrique.

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
PC1			--- (sur 22 élèves)	5	---	0	15
PC2			--- (sur 22 élèves)	1	---	0	16
Eval. PC1			--- (sur 23 élèves)	3	---	3	20
Eval. PC2			--- (sur 23 élèves)	0	---	0	14

Tableau 29

Nous pouvons penser que la faible moyenne de la classe trouve ses sources dans les types de preuves :

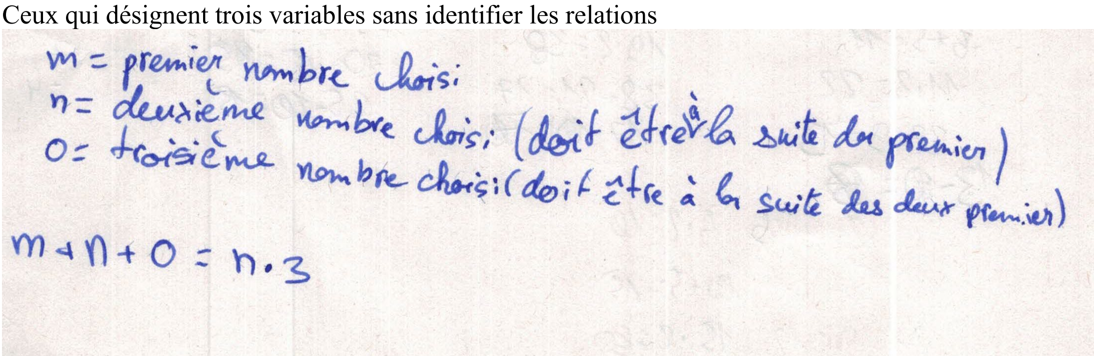
PC	Absence de preuve	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle		
		L'empirisme naïf	L'expérience cruciale	L'exemple générique	L'expérience mentale	Le calcul sur les énoncés	La démonstration en mobilisant la distributivité dans le cadre algébrique
PC1	10	2		1	4		7
PC2	10	1			5		8

Eval. PC1	1	4			10		8 (dont 4 correctement)
Eval. PC2	3	5	1		10		4

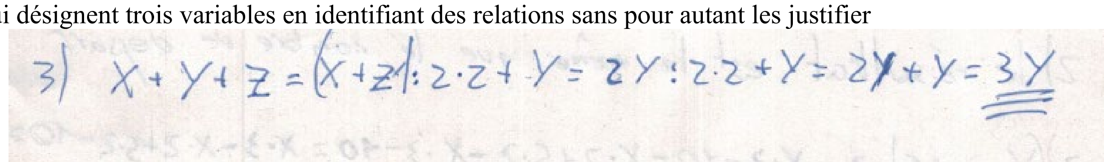
Tableau 30

En comparaison avec le programme de calcul qui a été évalué auparavant, les démonstrations sont apparues deux fois moins fréquemment dans les réalisations, tandis que le poids des "expériences mentales" est resté stable. Nous retrouvons les sous-catégories que sont « l'expérience mentale naïve » et les fausses démonstrations :

Expérience mentale naïve
Ceux qui désignent trois variables sans identifier les relations



Fausse démonstration
Ceux qui désignent trois variables en identifiant des relations sans pour autant les justifier



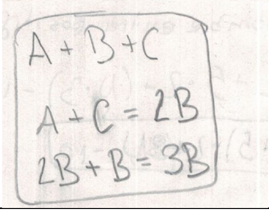


Figure 53

4. Conclusions

Pour commenter les résultats obtenus, je rappellerais le fil conducteur de cette recherche qu'est l'éventuelle possibilité d'introduire des problèmes de généralisation et de preuves en 9e afin de permettre une entrée dans l'algèbre de manière significative.

À la suite de l'analyse des données récoltées, plusieurs résultats significatifs sont apparus nous permettant de formuler certains points d'attention :

- Point 4.1 : Les problèmes de généralisation et de preuves sont accessibles dès la 9e ;
- Point 4.2 : La notion de preuve nécessite une approche progressive ;
- Point 4.3 : La nécessaire manipulation des expressions littérales à l'aide de programmes de calculs ;
- Point 4.4 : La nécessité d'élargir l'organisation didactique de la séquence à l'axe thématique « Nombres et opérations » et au chapitre « fonctions et diagrammes »;
- Point 4.5 : La propriété de distributivité doit être un objet d'enseignement explicite.

Nous développons ci-après ces différents points.

4.1 Des problèmes de généralisation et de preuve dès la 9e

L'analyse des productions des élèves, à partir des tableaux ci-dessous (Tab. 31 et 32), révèle que les élèves ont réussi à produire les généralisations attendues. Nous pouvons ainsi dire que les problèmes de généralisation et de preuve, tels que ceux présentés lors de la séquence, sont accessibles aux élèves de 9e. Nous avons également observé une réelle progression dans le raisonnement mathématique de la classe, venant confirmer l'engagement et l'implication des élèves dans cette séquence. Le tableau (Tab. 31) ci-dessous reprend les critères établis sur le développement de la pensée algébrique :

Pensée arithmétique — Début de la pensée algébrique — Pensée algébrique

	A	B	C	D	E	F	G
			Identification de patterns sur un exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage de la lettre (au singulier ou au pluriel)
CC1 - S3			15 (sur 22)	3	5	0	8
CC1 - S3''			---	9	9	1	11
CC2			13 sur 23	1	2	0	18
Eval. PG1			19 sur 23	3	1	3	20
PC1			--- (sur 22 élèves)	5	---	0	15

PC2			--- (sur 22 élèves)	1	---	0	16
Eval. PC1			--- (sur 23 élèves)	3	---	3	20
Eval. PC2			--- (sur 23 élèves)	0	---	0	12

Tableau 31 – Récapitulatif de l'évolution du raisonnement des élèves durant la séquence

Pour autant, il nous faut relativiser ces résultats compte tenu par exemple de la présence de deux enseignants en classe, facilitant ainsi la gestion de classe et la mise en activité. En outre, nous constatons une réelle évolution, passant de l'absence de preuve à une capacité à fournir des preuves intellectuelles. Cependant, nous remarquons également un certain plafond de verre en ce qui concerne l'accès à la démonstration, en raison des difficultés rencontrées par les élèves dans la manipulation des expressions algébriques.

PC	Absence de preuve	Preuve pragmatique			Preuve intellectuelle		
		L'empirisme naïf	L'expérience cruciale	L'exemple générique	L'expérience mentale	Le calcul sur les énoncés	La démonstration en mobilisant la distributivité dans le cadre algébrique
PC1	10	2	0	1	4	0	7
PC2	10	1	0		5	0	8
Eval. PC1	1	4			10		8 (dont 4 correctement)
Eval. PC2	3	5	1		10		4

Tableau 32 - Récapitulatif de l'évolution des preuves des élèves durant la séquence

4.2 Enseigner la notion de preuve

En complément de nos conclusions abordés au paragraphe 4.1, il nous semble important de repenser l'enseignement de la preuve. Bien que centrale en mathématique, la preuve semble ne pas occuper suffisamment de place dans le cursus romand. En 8^{e}, le mot « preuve » apparait 3 fois dans le livre et 1 fois dans le fichier de l'élève et exclusivement en lien avec la division euclidienne. En 9^{e}, le mot « preuve » n'apparait jamais dans le livre et le fichier, à l'exception de l'aide-mémoire et en lien avec le théorème de Pythagore qui n'est enseigné qu'en 10^{e}. Ainsi, si l'usage de la lettre prend son sens dans l'activité de preuve, qu'en est-il du sens même de cette activité ? Les élèves comprennent-ils l'intérêt de prouver ? Les résultats sur la forte proportion d'élèves à ne pas savoir produire une preuve ou la faiblesse du nombre de démonstration doit nous questionner sur la nécessité de la progressivité de l'apprentissage de la recherche et la production de preuve, indépendamment de son formalisme. En ce qui concerne l'enseignement de la preuve, la résolution de problèmes de généralisation et de preuve permet de prendre en compte l'aspect dual de la preuve, en tant que processus et produit ainsi que le saut conceptuel pour les élèves, passant d'une perspective pragmatique à une perspective plus théorique (Balacheff, 1987). Pour autant, les difficultés observés ont mis en avant l'absence de démarche jusqu'au produit fini. Il existe donc un défi didactique important dans l'enseignement de la preuve en mathématiques, nécessitant une réflexion sur la manière de concilier l'enseignement du processus et de la production finale de la preuve même s'il est important de noter que ces efforts visant à donner du sens à la preuve ne garantissent pas automatiquement la réussite des apprenants dans ce domaine.

4.3 Plus de formalisme et d'exercices rituels

Notre étude a mis en avant l'existence d'un enseignement, dans le canton de Vaud, potentiellement un peu trop centré sur le formalisme et la dimension « objet ». En souhaitant rééquilibrer le poids des dimensions, notre séquence a montré quelques limites en mettant trop l'accent sur la dimension « outils ». Entre les problèmes de généralisation et de preuve, le travail sur les expressions s'est également révélé insuffisant pour atteindre le stade de la démonstration. L'analyse des activités de preuve a montré une faible émergence de la distributivité dans le cadre algébrique (ayant pour objectif de transformer et réduire les expressions). Nous émettons l'hypothèse qu'un travail intermédiaire, entre les activités de généralisation et de preuve, sur la simplification des écritures, la réduction, l'usage de la distributivité simple et double, aiderait à lever les difficultés liées à la manipulation des expressions littérales parenthésées. En effet, les problèmes de généralisation ayant permis d'introduire la lettre et les expressions littérales et de leur donner du sens, il serait légitime de travailler sur les règles qui régissent ces expressions. Nous pensons que proposer les activités, en complément de ceux existant dans la séquence, faciliterais la production de démonstration dans les problèmes de preuve à l'aide programmes de calculs.

Calcul sur les expressions	**Produire une expression avec lettre imposée**	**Produire une expression sans lettre imposée**	**Simplifier une expression**
Calcule l'expression suivante quand n = 2 : n·5 – 2	FA67 Traduis chaque phrase à l'aide d'une expression littérale. **a)** Le produit de 13 par *x*. **b)** La somme de *y* et de 11. **c)** Le produit de 7 par la somme de 12 et de *z*. **d)** La somme du produit de 10 par *c* et de 9.	Adeline achète des souvenirs pour ses amies. Un souvenir coûte 3 CHF. Elle paie avec un billet de 50 CHF. • Combien lui reste-t-il d'argent si elle achète 8 souvenirs ? • Ecris une expression pour calculer la somme d'argent qu'il lui reste en fonction du nombre de souvenir qu'elle achète.	

Deux programmes de calculs équivalents	**Développer les expressions**
Voici deux programmes de calcul Programme A • Choisir un nombre.	2·(n+3) (n+2)·5 x·(x +9)

• Multiplier le par 3. • Soustraire 15 au résultat. Programme B • Choisir un nombre. • Lui soustraire 5. • Multiplier le résultat par 3. 1. Appliquer chaque programme aux nombre 1 ; 2,5 et – 2. Quelle conjecture peut-on formuler ? 2. A l'aide des expressions littérales des programmes A et B, démontrer que pour tous les nombres choisis au départ, les deux programmes donneront le même résultat.	$3 \cdot z \cdot (z+4)$ $3y \cdot (5y+2)$

Tableau 33 - Proposition d'activités complémentaires

De plus, un travail sur des programmes de calculs équivalents permettrait de renforcer la notion d'expressions équivalentes. Cela permettrait de lever l'erreur commise par de nombreux élèves qui ont transformé 2x-3x en 3x-2x (paragraphe 3.6.3) sans comprendre pourquoi. En complément, nous avons également observé un déficit dans la maitrise des livrets et les calculs mobilisant les quatre opérations et la priorité des opérations. Proposer tout au long de l'année des exercices « flash », incluant un niveau de difficulté progressif, sur des calculs nécessitant le respect des règles de priorité ainsi que des programmes de calcul simple, permettraient d'améliorer la fluidité et la rapidité de calcul des élèves :

Règles de priorité	**Programme de calcul**
$3\times[3 + 18 - 9]$	Voici un programme de calcul : • Choisir un nombre • Prendre le double du nombre • Soustraire 4 • Multiplier par 2 1) Effectuer le programme avec 4 2) Effectuer le programme avec 7 3) Effectuer le programme avec 10 4) Effectuer le programme avec 17 5) Effectuer le programme avec 17

Tableau 34 - Activités complémentaires

4.4 Une organisation élargie

Actuellement, la direction pédagogique du canton de Vaud recommande d'enseigner le chapitre « Calcul littéral » en fin d'année et dissocié des chapitres « NO Nombres naturels et décimaux » et « FA fonction et diagramme ». Il nous semble que le chapitre « calcul littéral » arrive bien trop tardivement dans la progression des apprentissages. Au vu des résultats de notre étude, nous pensons qu'il serait légitime de repenser le découpage et l'organisation générale de la séquence afin de faciliter les liens entre les différents chapitres et plus particulièrement entre les chapitres « NO Nombres naturels et décimaux », « FA fonction et diagramme » et « Calcul littéral ». Certes le découpage actuel semble relever d'une démarche « en spirale » permettant de revenir sur une notion déjà étudiée afin de l'appliquer dans un nouveau contexte ou l'insérer dans un cadre plus large. Mais ce n'est pas le cas pour l'enseignement de l'algèbre en 9e. En étant enseigné en dernier, il est impossible de revenir sur les la notion de fonction. et de plus la progression par chapitre cloisonne l'enseignement et alimente le contrat qui donne une impression d'achevé à la fin de chaque chapitre, vidant ainsi l'algèbre de son sens. Nous recommandons de donc de travailler l'algèbre plus tôt dans l'année.

RECOMMANDATION DP-DGEP 9S	PROPOSITION D'ORGANISATION
NO Nombres naturels et décimaux	NO Nombres naturels et décimaux
ES Figures géométriques planes	ES Figures géométriques planes
ES Transformations géométriques	NO Nombres relatifs
NO Nombres relatifs	GM Lignes et surfaces
GM Lignes et surfaces	NO Nombres rationnels
NO Nombres rationnels	**FA Calcul littéral**
FA Fonctions et diagrammes	FA Fonctions et diagrammes
ES Représentation des solides	ES Représentation des solides
GM Solides et divers mesures	GM Solides et divers mesures
FA Calcul littéral	ES Transformations géométriques

Tableau 35 - Proposition de découpage annuel

Si nous pouvions aller plus loin dans une refonte, nous recommanderions, comme nous le constatons dans les ouvrages français, un décloisonnements des chapitres. Le décloisonnement permettrait de sortir de l'organisation par « chapitre » et donc de mélanger autant que possible les thèmes, notamment le numérique, l'algébrique et le géométrique afin de renforcer le sens des concepts.

4.5 La propriété de distributivité en 9e

La compréhension et la mobilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition se sont révélées primordiales tout au long de cette expérimentation et les difficultés à la mettre en œuvre ont mis en évidence une problématique quant à son enseignement. Nous pouvons supposer que le temps consacré à ce qui devait être un réinvestissement, a donné des résultats positifs au vu de l'analyse de l'évaluation. Pour autant, ces résultats ont été obtenus au détriment d'un travail sur d'autres notions et ne concernent que la mobilisation de la propriété de la distributivité dans un cadre numérique. Ces faits constituent une faiblesse dans la progression des apprentissages de cette classe de 9e. En effet, un travail sur la propriété de la distributivité dans un cadre numérique pourrait se réaliser dans le chapitre NO nombre naturel et décimal. À date ce travail n'existe pas dans les MER 9e et les élèves sont renvoyés à une notion introduite en 7e et dont on ne sait pas comment elle est travaillée. Un autre obstacle à la bonne compréhension de la propriété de la distributivité réside dans notre choix de ne travailler uniquement que dans le cadre numérique. Proposer de travailler dans le cadre géométrique permettrait de favoriser son apprentissage et permettrait une transition vers la manipulation d'expressions littérales. Nous pourrions, par exemple, reprendre le FA76 après avoir travaillé sur les activités CR1, en changeant les inconnues par des données numériques et en demandant d'exprimer l'aire du rectangle CDFG de deux façons différentes.

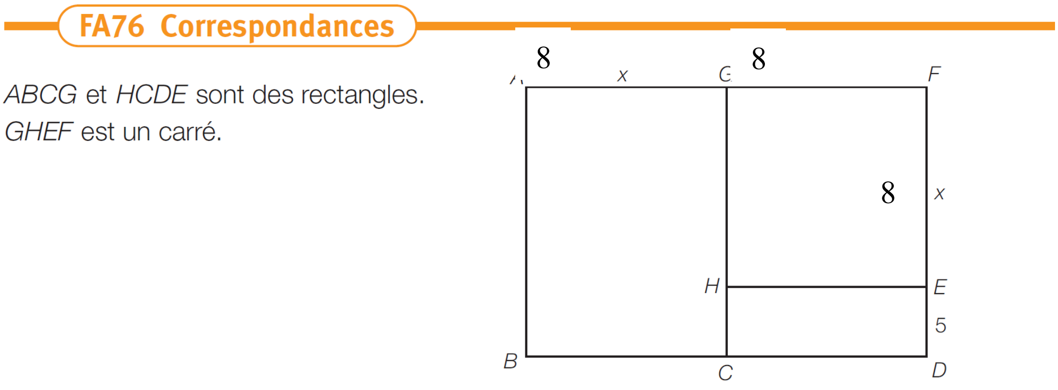


Figure 54

De plus, le travail réalisé dans le cadre numérique ne semble pas s'être transposé à tous dans le cadre algébrique. Il semble nécessaire de réinvestir la propriété de distributivité de façon plus formelle, après le travail sur les carreaux colorés et avant le travail sur les programmes de calculs. Cette seconde limite de la séquence pourrait trouver ses origines dans une institutionnalisation de la propriété de la distributivité uniquement dans un cadre numérique et non dans un cadre algébrique comme précisé au paragraphe 3.3.2. Cette institutionnalisation aurait dû avoir lieu après le problème CC1 accompagné par la réalisation du FA76 dans sa version originale.

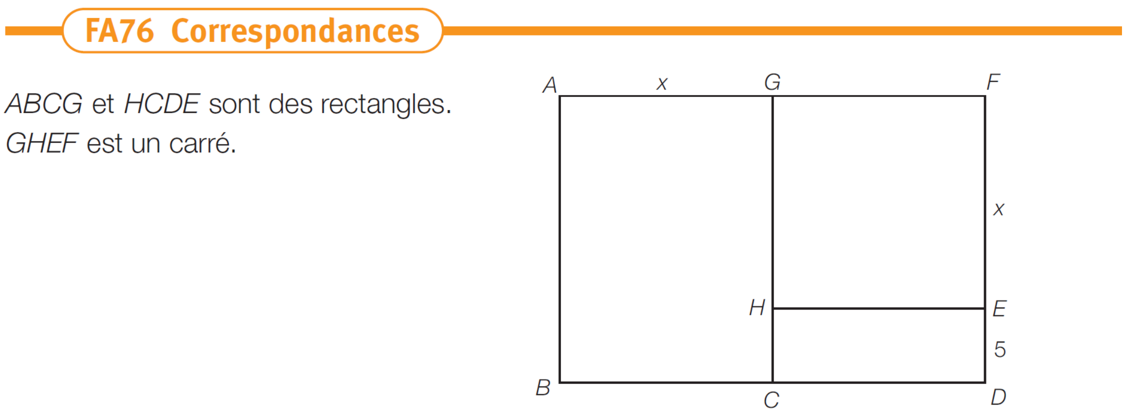


Figure 55 – Exercice FA76 – Livre MER 9e

4.6 Perspectives

La présente étude visait à caractériser l'introduction au calcul littéral à travers des problèmes de généralisation et de preuve, en analysant les productions des élèves. Globalement, nous avons constaté que cette séquence a encouragé la classe à se lancer dans une démarche de recherche et a suscité un engagement et un enthousiasme certains chez les élèves. Les échanges avec les élèves ont été extrêmement enrichissants, révélant la diversité des résultats obtenus grâce à la liberté accordée aux élèves dans leurs démarches. La conception de la séquence telle qu'elle a été mise en place requiert une préparation significative, en particulier en ce qui concerne la propriété de distributivité et la notion de preuve, qui diffèrent des pratiques courantes en 9e année. Les perspectives de développement sont vastes et englobent notamment des prérequis antérieurs à la 9e année, ainsi que l'analyse des nouveaux moyens d'enseignement destinés aux classes de 7e et 8e, en cours de déploiement dans le canton de Vaud. Elles se situent aussi sur le plan de la continuité au travers de l'extension de ce travail à la 10e année et étudier d'autres types de problèmes notamment ceux présents dans les MER de 11e et ainsi créer un continuum. De plus, l'introduction de l'algèbre à travers des problèmes de généralisation et de preuve en 9e offre une réelle opportunité pour les enseignants de revoir leur planification annuelle des apprentissages. Une progression en spirale pourrait favoriser la révision, le renforcement et la consolidation des concepts mathématiques tout au long de l'année scolaire. Il serait nécessaire de comprendre les avantages potentiels d'une telle approche et d'explorer les adaptations spécifiques qui pourraient être nécessaires. Un travail complémentaire sous la forme d'une ingénierie de recherche, concept étendu de l'ingénierie didactique (Perrin-Glorian & Bellemain, 2019) viserais à produire des savoirs sur lesquels reposerais cette nouvelle perspective. D'un point de vue plus personnel, ce travail nous a permis d'explorer de nouvelles approches didactiques. La conception et l'étude de cette séquence ont été un exercice hautement stimulant et nous ont permis de découvrir ou redécouvrir les mathématiques et en particulier l'algèbre. De plus notre rôle d'enseignant lors de la résolution de problème a été un champ de questionnement important en particulier sur le processus de dévolution et nos régulations (Favier, 2022). Enfin, la conception comme l'analyse de cette séquence nous a permis de travailler sur les exigences d'une expérimentation et la rédaction d'un travail de recherche que nous souhaiterions continuer d'approfondir en menant à terme d'autres recherches en didactiques des mathématiques. Par chance, pour l'année 2023-2024, nous reprenons la classe au niveau 11e VP, nous y voyons ainsi une opportunité pour réinvestir les résultats de ce travail et continuer à réfléchir à l'enseignement de l'algèbre.

Bibliographie

Allal, L. K., & Mottier Lopez, L. (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation*. De Boeck.

Alves, C., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Dametto, S. M., Lamorthe, C. P., Roubin, S., & Coppé, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, *92*, 1-25.

Arcavi, A., Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (1989). L'algèbre avant la lettre. *Petit x*, *24*, 61-71.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Université Claude Bernard Lyon I.

Assude, T., Coppé, S., & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : Atomisation et réduction. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 41-62.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *3*(3), 261-304.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation (Proving Processes and Situations for Validation). *Educational studies in mathematics*, 147-176.

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, *24*(2-3), 285-328.

Bardini, C. (2006). *Le rapport au symbolisme algébrique : Une approche didactique et épistémologique*.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching. In *Approaches to algebra* (p. 3-12). Springer.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches*.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège–première partie : L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*(51-94).

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, *19*, 43-72.

Chevallard, Y., & Cirade, G. (2006). Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques. *De l'integration des technologies aux dispositifs de formation de futurs enseignants*.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège : Au pied de la lettre!* Institut National de Recherche Pédagogique.

Constantin, C., & Coulange, L. (2017). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : Une entrée dans la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 9-32.

Constantin, C., & Coulange, L. (2019). La multiplication et la propriété de distributivité au primaire : Une entrée dans la pensée algébrique? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 9-32. https://doi.org/10.7202/1055726ar

Coppé, S. (2020). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Une entrée par les programmes de calculs. *In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner & M. Larguier (dir.) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires. Québec, Canada (pp. 21-43). Livres en ligne du CRIRES*, 21.

Coppé, S., & Grugeon, B. (2009, juin 18). *Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ?* In Colloque de la CORFEM. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959612

Coppé, S., Grugeon-Allys, B., & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : L'exemple du carré bordé. *Petit x*, *102*, 57-80.

Coulange, L. (2019). L'enseignement de l'algèbre élémentaire : Bilan et perspectives ? In *De la linguistique à l'épistémographie.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02514474

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J., & DESANTI, J.-T. (1986). *Histoire des mathématiques. Routes et dédales.*

Dorier, J.-L. (1997). *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire-Perspective théorique sur leurs interactions* [PhD Thesis]. Université Joseph-Fourier-Grenoble I.

Douady, R. (1986). *1986 Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 7. N° 2. P. 5-31. Jeux de cadres et dialectique outil-objet.* https://publimath.univ-irem.fr/biblio/AAR99126.htm

Douek, N., & Morselli, F. (2012). Preuve et algèbre au college : De la conception d'une séquence d'apprentissage à l'evolution du cadre théorique de référence. *Recherches en didactique des mathématiques*, 283-304.

Farès, N. (2017). *AL-KHWĀRIZMĪ Vie, oeuvre et livre algébrique*. https://hal.science/hal-01722173

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* [PhD Thesis]. University of Geneva.

Ferraton, G., & Chaachoua, H. (2013). Rapport institutionnel au calcul littéral au collège. Etat des lieux et perspectives. *Petit x*, *91*, 49-67.

Floris, R. (2014). Fonder l'algèbre élémentaire : Programmes de calculs, formules, calculatrice. *MATH-ÉCOLE*, *221*, 23.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques (Revue)*, *17*(2), 167-210.

Guichard, J. P. (2000). Qu'est-ce que l'algèbre? Un domaine ou un langage?, L'algèbre au lycée et au collège. *Publication de l'IREM de Montpellier*, 40-57.

Gulino, N. (2017). *Le calcul littéral au cycle 4 : Un chemin vers l'autonomie*. 54.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra.*

Lamorthe, C. P., & Roubin, S. (2010). Le calcul réfléchi : Entre sens et technique. *Le Bulletin Vert*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02314670

Larguier, M. (2015). Première rencontre avec l'algèbre. *In Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage–Actes du colloque EMF2015*, 313-333.

Nigon, C. B., & Coppé, S. (2014). La" preuve pour comprendre", un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième. *Repères IREM*, *94*, 9-30.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : Modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* [PhD Thesis]. Université Paris-Diderot-Paris VII.

Pilet, J., & Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Éducation et didactique*, *15*(15-2), Article 15-2. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580

Pilet, J., & Horoks, J. (2015). Une recherche en cours sur les pratiques enseignantes d'évaluation des apprentissages des collégiens en algèbre. *In séminaire national de l'ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques)*.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In *Approaches to algebra* (p. 107-111). Springer.

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Rahim, K., & Hassayoune, S. (2015). La difficile genèse de la pensée algèbrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. *In Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage– Actes du colloque EMF2015*, 386-402.

Rashed, R. (2007). Al-Khwarizmi. Le commencement de l'algèbre. Texte établi, traduit et commenté par R. Rashed. *Sciences dans l'histoire. Paris: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard*.

Schifter, D. (1997). Developing Operation Sense as a Foundation for Algebra. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.*

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique : La constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Editions Petra.

Viète, F. (1868). *Introduction à l'art analytique*. Imprimerie des sciences mathematiques et physiques.

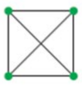
Vlassis, J., Demonty, I., & Squalli, H. (2017). Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, *20*(3), 131-155.

Annexes

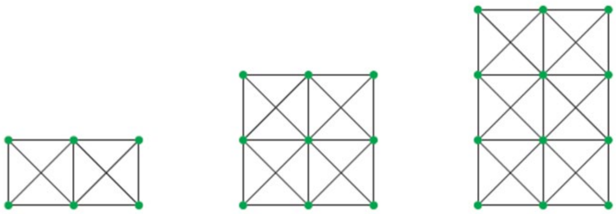
Annexe 0

FA6 Treillis

Un élément de ce motif est constitué d'un carré et de ses diagonales.



On les empile ainsi :



1re étape   2^{e} étape   3^{e} étape   etc.

Combien comptera-t-on d'éléments de motif à la 10^{e} étape ? A la 25^{e} ? Et à la 2011^{e} ?

Et de diagonales ? Et de points verts ?

Explique ta démarche.

FA11 Velopass

Une carte de membre au *Velopass* de ta ville coûte Fr. 35.–. Pour chaque heure d'utilisation, tu dois encore payer Fr. 1.–.

a) Etablis un tableau de valeurs, puis construis une représentation graphique de cette situation.

b) Comment exprimerais-tu le prix à payer pour *n* heures d'utilisation d'un vélo ?

FA12 Viasuisse

Le service Viasuisse, centrale suisse d'informations sur le trafic routier, est disponible au numéro 163 au tarif de 90 ct. l'appel, puis 90 ct. la minute.

a) Etablis un tableau de valeurs de la situation et réalise une représentation graphique.

b) Détermine comment calculer le prix à payer pour un nombre quelconque de minutes.

Annexe 1

<u>Séance 1 et 2 - Rappels sur les règles de la distributivité</u>

Activité CR1. Calculer <u>sans poser</u> et <u>sans utiliser la calculatrice.</u>

a. 45 x 21 =	b. 26 x 98 =	c. 23 x 103 =
d. 43 x 32 =	e. 21 x 45 =	

Activité CR2. Calculer <u>sans poser</u> et <u>sans utiliser la calculatrice.</u>

a. 8 x 15 + 2 x 15 =	b. 12 x 32 – 2 x 32 =	c. 101 x 72 - 72 =
d. 155 x 99 + 101 x 155		

Activité CR3. Calculer sans poser et sans utiliser la calculatrice.
(Pour les plus rapides)

a. 240 x 11 =	b. 16 x 57 + 57 x 84 =	c. 997 x 25 =
d. 33 x 591 - 790 x 33 =		

Annexe 1 bis.

Plan des séances 1 et 2

Séance 1 — Jour 1			
Phases	**Temps**	**Support et relances de l'enseignant**	**Éléments à observer**
Présentation du thème Calcul littéral	(1'00)	Écrire au tableau le titre de la séance : Introduction au calcul littéral - Rappel sur les règles de la distributivité.	
Mise en place	(2'00)	Les documents auront été au préalable déposés sur les bureaux dans une fourre souple.	Retirer la feuille « Séance 1 et 2 : Calculs réfléchis » de la fourre.
Introduction-Consignes	(1'00)	Lecture de l'énoncé de l'activité Activité CR1 $_{S1\text{-}2}$ Les questions sont projetées via un ANF (affichage numérique frontal). Demander aux élèves de noter tous les détails du calcul.	
Phase de recherche individuelle n°1 (Activité CR1 $_{S1\text{-}2}$ -a.)	(10'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	Travailler sur l'autorégulation à l'aide de valeurs approchées du résultat.
Mise en commun	(5'00)	Correction de l'activité CR1 $_{S1\text{-}2}$ -a. Verbaliser les décompositions, aboutir à des écritures parenthésées 45 × (20 + 1) = 45 × 20 + 45 × 1.	Réguler les erreurs du type : $\begin{cases} 45 = 40 + 5 \\ 21 = 20 + 1 \end{cases}$ 40 x 20 = 800 et 5 x 1 = 5 800 + 5 = 805. Ainsi que les fausses égalités.
Institutionnalisation	(3'00)	Distributivité de la multiplication sur l'addition	
Relance	(2'00)	Proposer 70 x 32	
Phase de recherche individuelle n°2 (Activité CR1 $_{S1\text{-}2}$ -.b, c, d)	(15'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	Privilégier les développements verticaux
Mise en commun	(5'00)	Correction rapide	

Séance 2 — Jour 2			
Phases	**Temps**	**Support et relances de l'enseignant**	**Éléments à observer**
Réinvestissement	(2'00)	4 x 8 = 4 x (3 + 5) — illustré avec les pommes Sinon, on peut faire remarquer que 10 + 5 + 10 + 5 + 10 + 5 + 10 + 5 est égal à 4 × 10 + 4 × 5, mais aussi à 4 × 15.	
Correction et Régulation de l'activité CR1 $_{S1\text{-}2}$.	(10'00)	Projection des erreurs réalisées la veille (fausses égalités…) sur l'exemple 45 × (20 + 1) = 45 × 20 + 45 × 1. Aborder la notion d'addition itérée Mise en commun des différentes méthodes de calcul.	Encourager les différentes décompositions : 45 x (10 + 10 + 1) ou 45 x (2 x 10 + 1) Réguler la double ou triple distributivité : (20 + 20 + 5) x (10 + 10 + 1)
Mise en place de l'activité CR2 $_{S1\text{-}2}$	(1'00)	Les documents auront été au préalable déposés sur les bureaux dans une fourre souple.	
Introduction-Consignes	(1'00)	Lecture de l'énoncé de l'activité CR2 $_{S1\text{-}2}$ Les questions sont projetées via un ANF (affichage numérique frontal). Demander aux élèves de noter tous les détails du calcul.	
Phase de recherche individuelle n°1 (activité CR2 $_{S1\text{-}2}$. a, b, c, d)	(10'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	
Mise en commun	(5'00)	Correction	
Phase de recherche individuelle n°2 (activité CR3 $_{S1\text{-}2}$)	(10'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	
Mise en commun	(5'00)	Correction	

Annexe 1 ter.

SÉANCE	PRÉVISION	REELLE	ECARTS
Séance 1 et 2 - Calcul réfléchi : Rappels sur les règles de la distributivité	1 x 45’	1 x 30’	-15’
	1 x 45’	1 x 65’ 1 x 25’	+45’

Fig40. Grille d’analyse de la production d’élèves des activités CC1 et CC2

PHASES	**PRÉVISION**	**REELLE**	**COMMENTAIRES**
SÉANCE 1 – 12 MAI			
Présentation du thème « Calcul littéral »	(1’00)	(1’00)	…
Mise en place	(2’00)	(1’00)	…
Introduction-Consignes	(1’00)	(1’00)	…
PRI [12] n°1 (Activité CR1 $_{S1-2}$ -a.)	(10’00)	**(9’00)**	
Mise en commun	(5’00)	(4’00)	3 élèves au tableau
Institutionnalisation	(3’00)	(2’00)	
Relance	(2’00)	(2’00)	
PRI n°2 (Activité CR1 $_{S1-2}$ -.b, c, d, e)	(15’00)	**(8’00)**	
Mise en commun	(5’00)	**(2’00)**	Mise en commun du CR1 $_{S1-2}$ -.b, c uniquement
SÉANCE 2 — 13 MAI			
Réinvestissement	(3’00)	(3’00)	
Correction et Régulation de l’activité CR1 $_{S1-2.}$	(10’00)	**(28’00)**	Importante phase de régulation avec mise en commun
Mise en place de l’activité CR2 $_{S1-2}$	(1’00)	(1’00)	
Introduction-Consignes	(1’00)	(1’00)	
PRI n°1 (activité CR2 $_{S1-2}$)	(10’00)	(7’00)	
Mise en commun	(5’00)	**(10’00)**	La mise en commun a été partielle.
PRI n°2 ~~(activité CR3 $_{S1-2}$)~~ (activité CR2 $_{S1-2}$)	(10’00)	(8’00)	Nous avons laissé les élèves travailler sur CR2. Nous n’avons pas abordé CR3, reporté pour la 18 mai (séance 4)
Mise en commun	(0’00)	(5’00)	
Institutionnalisation	(0’00)	(2’00)	Retour sur l’institutionnalisation
Séance 2’ — 18 MAI			
Mise en commun CR3 $_{S1-2}$	(0’00)	**(25’00)**	

Fig41. Comparatif de la chronologie des événements séance 1 et 2

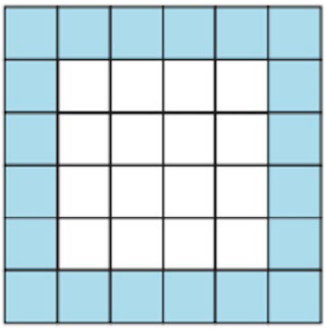
[12] PRI : Phase de recherche individuelle

Annexe 2

Séance 3 et 4 : Généralisation : Les carreaux colorés

Activité CC1 $_{S3-4}$

Tu as un carré de côté 6 carreaux dans lequel des petits carreaux sont colorés.



Quatre bords colorés.

a. Pour ce carré de côté 6, tu peux savoir combien de carreaux sont colorés. Si on a un carré de côté 10, combien de petits carreaux sont colorés ?

b. Si on a un carré de côté 100, combien de petits carreaux sont colorés ?

c. Trouve une formule, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux colorés pour n'importe quel carré.

d. Les expressions possibles obtenues lors de l'activité 1 sont :

4n – 4	**4(n – 1)**	**n + n – 1 + n – 1 + n – 2**
n + n + n – 2 + n – 2	**4(n – 2) + 4**	**$n^2 - (n-2)^2$**

Comment montrer que ces expressions sont égales pour n'importe quelle valeur du côté du carré ?

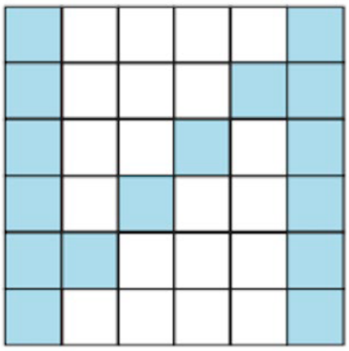
e. Question supplémentaire : Arié pense que le nombre de carreaux colorés est toujours un multiple de 4. VRAI ou FAUX ? Prouve-le !

Séance 3 et 4 : Généralisation : Les carreaux colorés

Activité CC2 $_{S3-4}$

Tu as un carré de côté 6 carreaux dans lequel des petits carreaux sont colorés.

a. Trouve une formule, un moyen de dire comment calculer ce nombre de carreaux colorés pour n'importe quel carré.



Deux bords opposés et une diagonale colorés.

Annexe 2 bis.

Plan des séances 3 et 4 - Les séances doivent idéalement s'organiser sur 2 x 1 période

Période 1 et 2			
Phases	**Temps**	**Support et relances de l'enseignant**	**Éléments à observer**
Mise en place	(1'30)	Les documents auront été au préalable déposés sur les bureaux dans une fourre souple.	Retirer la feuille séance 3 et 4 : les carreaux colorés
Introduction-Consignes	(1'30)	Lecture de l'énoncé de l'activité Les questions a et b sont projetées via un ANF (affichage numérique frontal). Demander aux élèves de noter tous les détails du calcul.	
Phase de recherche individuelle n°1 (Activité CC1 $_{S3-4}$ a. et b.)	(10'00)	Circuler pour s'assurer que les élèves entrent bien dans la production écrite de calculs. Les élèves répondent aux 2 questions proposées, individuellement ou en binôme. Pour les plus rapides : demander la même chose pour un « carré de taille 153 ».	S'assurer que les élèves comprennent le concept de pattern et l'utilisent pour élaborer des stratégies. Repérer les élèves à envoyer au tableau selon leurs procédures.
Mise en commun	(15'00)	Des élèves ayant des stratégies de calcul différentes viennent les exposer pour le carré Taille 6. On illustre les stratégies par des dessins au tableau sur le carré Taille 6 et en projetant des diapositives. Invalider la proportionnalité pour la taille 10 et 100.	Vérifier les traces écrites. Il est indispensable d'avoir au moins deux stratégies de calcul pour la fin de l'activité. Invalider la proportionnalité.
Phase de recherche individuelle n°2 (Activité CC1 $_{S3-4}$ c.)	(7'30)	Les élèves produisent des phrases ou des programmes de calculs. Laisser l'introduction de la lettre à la charge des élèves plutôt que de la donner. Pointer l'insuffisance des calculs numériques et la nécessité d'avoir recours à la lettre pour généraliser.	L'utilisation de lettres différentes pour désigner une même variable n'a pas d'influence sur la solution du problème.
Institutionnalisation	(2'00)	Lorsqu'on cherche à établir une formule générale, on utilise souvent une variable, comme "n", pour représenter une quantité qui évolue d'une étape à l'autre. Cette variable, "n", prendra des valeurs différentes à chaque étape, ce qui en fait une variable dynamique.	
Phase de recherche individuelle n°3 (Activité CC1 $_{S3-4}$ d.)	(7'30)	La lettre n doit désigner la même grandeur afin de permettre l'équivalence des formules.	
Mise en commun	(5'00)		
Phase de recherche individuelle n°4 (Activité CC1 $_{S3-4}$ e.)	(10'00)	Réinvestissement de la notion de multiple Généraliser l'écriture d'un multiple d'un nombre	Rappeler que l'activité manipule des entiers naturels

Mise en commun	(5’00)		
Phase de recherche individuelle n°5 (Activité CC2 $_{S3-4}$)	(15’00)	Encourager les élèves à trouver un pattern	
Mise en commun	(10’00)		

Annexe 2 ter.

SÉANCE	PRÉVISION	REELLE	ECARTS
Séance 3 et 4 - Généralisation : Les carreaux colorés	1 x 45’	1 x 25’ 1 x 22’30 1 x 40’30	+43’
	1 x 45’	1 x 47’30 1 x 5’	+7’30

Fig48. Grille d’analyse de la production d’élèves des activités CR1 et CR2

La synthèse du déroulement réel des séances est donc la suivante :

SÉANCE 3 — 13 MAI			
Phases	Temps prévisionnel	Temps réel	Commentaires
Mise en place	(1’30)	(2’30)	Retard sur la distribution des documents. Nous avons oublié de perforer les documents.
Introduction-Consignes	(1’30)	(2’30)	Projection tardive
PRI n°1 (Activité CC1 a. et b.)	(10’00)	(10’00)	
Mise en commun	(15’00)	**(10’00)**	3 patterns sur 6 ont été abordé
PRI n°2 (Activité CC1 c.)	(7'30)	**(0’00)**	Dans les faits cette phase de recherche a eu lieu pour certains élèves
Institutionnalisation	(2’00)	**(0’00)**	Non réalisé
PRI n°3 (Activité CC1 d.)	(7'30)	**(0’00)**	Non réalisé
SÉANCE 3’ — 18 MAI			
Activité CC1 a. et b. et c. Mise en commun	(0’00)	**(15’00)**	Projection des stratégies trouvés lors de la séance 3 et détermination des autres stratégies
PRI (Activité CC1 c.)	(7’30)	(0’00)	
Mise en commun Activité CC1 c.	(0’00)	(7’30)	
SÉANCE 3’’ — 19 MAI			
PRI (Activité CC1 c.)	(7'30)	(23’00)	
Mise en commun	(0’00)	**(15’00)**	
Institutionnalisation	(2’00)	(5’30)	
SÉANCE 4 — 19 MAI			
PRI n°1 (Activité CC1 d.)	(7'30)	(17’30)	
Mise en commun	(5’00)	(10’00)	
PRI n°2 (Activité CC1 e.)	(5’00)	(1’00)	
Mise en commun	(5’00)	(1’00)	
PRI n°3 (Activité CC2)	(15’00)	(10’00)	
Mise en commun	(10’00)	(8’00)	
SÉANCE 4’ — 20 MAI			

Mise en commun Activité CC2 $_{S3-4}$	(00'00)	(5'00)	

Fig49. Comparatif de la chronologie des événements séance 3 et 4

Annexe 3

Séance 5 et 6 : Le calcul littéral pour prouver – Les programmes de calculs !

Activité PC1. Une drôle de programme de calcul

Voici un programme de calcul :
• Choisir un nombre.
• Multiplier ce nombre par 2.
• Ajouter 8 au résultat.
• Soustraire (retranche) le double du nombre de départ.

a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix.

b. Que remarques tu ? Quelle conjecture peut-on formuler ?

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

Activité PC2. Choix sans conséquences

• Choisir un nombre.
• Ajoute 4.
• Multiplie par 2.
• Soustraire (retranche) 8.

a. Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix.

b. Quelle conjecture peut-on formuler ?

c. Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

Activité PC3. Ecrire avec des lettres.

Choisir un nombre.
• Ajoute 4.
• Multiplie par 2.
• Soustraire (retranche) 7

a. Quelle conjecture peut-on formuler ?

b. Trouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.

c. Prouver que la somme de deux entiers consécutifs est TOUJOURS impaire

Activité PC4. Vous avez dit « conjecture »

Voici 3 programmes de calculs

Programme 1	Programme 2	Programme 3
Choisir un nombre Ajouter 4 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 5	Choisir un nombre Ajouter 2 Prendre le carré du résultat précédent Soustraire 9	Choisir un nombre Écrire son double puis ajouter 8 Multiplier le résultat obtenu par le nombre choisi au départ Soustraire 10

1. Calcule les résultats des trois programmes pour la valeur 1 et -5 ?
   Qu'observe-t-on ?
2. Quelle conjecture peut-on formuler ?
3. Choisis un nombre au hasard et calcule les résultats des trois programmes pour cette valeur.
   Qu'observe-t-on ?

Annexe 3 bis.

La séance peut s'organiser sur 1 période à 2 périodes

Période 1 — Jour 1			
Phases	**Temps**	**Support et relances de l'enseignant**	**Éléments à observer**
Mise en place	(2'00)	Les documents auront été au préalable déposés sur les bureaux dans une fourre souple.	Retirer la feuille séance 5 et 6 : Le calcul littéral pour prouver
Introduction-Consignes	(1'00)	Lecture de l'énoncé. Les questions sont projetées via un ANF (affichage numérique frontal) (Annexe 5). Demander aux élèves de noter tous les détails du calcul.	
Phase de recherche individuelle n°1 (PC1)	(5'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	Encourager les élèves à essayer le PC avec plus de 2 nombres : 3 au minimum.
Mise en commun	(5'00)	Correction de l'activité 1. Réactiver les règles de calculs littéraux à l'aide de la distributivité : 2n – 2n = 2(n-n) = 0	
Phase de recherche individuelle n°2 (PC2)	(5'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	
Mise en commun	(5'00)	Correction rapide Réactiver le fait que les propriétés de la DMA/DMS s'étendent aux expressions littérales.	
Phase de recherche individuelle n°3 (PC3)	(10'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	Exiger les justifications permettant d'écrire les égalités
Mise en commun	(5'00)	Correction rapide	
Institutionnalisation	(5'00)	Structure des nombres pairs et impairs	
Phase de recherche individuelle n°4 (PC4)	(15'00)	Passer dans les rangs. Encourager la production écrite.	Encourager les élèves à essayer le PC avec plus de 2 nombres : 3 au minimum.
Mise en commun	(10'00)	Correction rapide	
Institutionnalisation	(5'00)	Institutionnaliser la notion de contre-exemple	

Annexe 3 ter.

La synthèse du déroulement réel des séances est la suivante :

SÉANCE 5 — 20 MAI			
Phases	Temps prévisionnel	Temps réel	Commentaires
Mise en place	(2'00)	(2'00)	
Introduction-Consignes	(1'00)	(2'00)	
Phase de recherche individuelle n°1 (PC1)	(5'00)	(10'00)	
Mise en commun	(5'00)	(2'00)	
Phase de recherche individuelle n°2 (PC2)	(5'00)	(5'00)	
Mise en commun	(5'00)	(2'00)	

Fig67. Comparatif de la chronologie des événements séance 5 et 6

La séance 6 n'a pas été mise en œuvre, car à ce stade nous avions déjà consommé toutes les périodes allouées.

SÉANCE	**PRÉVISION**	**REELLE**	**ECARTS**
Séance 1 et 2 - Calcul réfléchi : Rappels sur les règles de la distributivité	1 x 45'	1 x 30'	-15'
	1 x 45'	1 x 65' 1 x 25'	+45'
Séance 3 et 4 - Généralisation : Les carreaux colorés	1 x 45'	1 x 25' 1 x 22'30 1 x 40'30	+43'
	1 x 45'	1 x 47'30 1 x 5'	+7'30
Séance 5	1 x 45'	1 x 23'	-22'
Séance 6	1 x 45'	0'	-45'
Total :	6 x 45'	6 x 45' + 1 x 20'	+20'

Fig68. Comparatif de la chronologie des événements de la séquence

Annexe 4

Exercice 1. Calculer sans poser et sans utiliser la calculatrice

a. 99 x 21 =

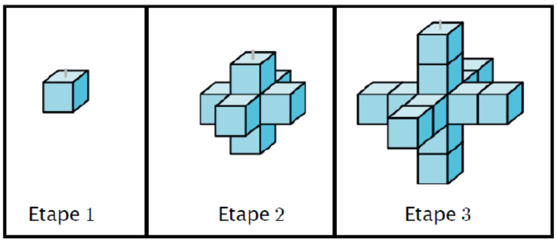
b. 13 x 101 =

c. 87 x 25 + 13 x 25 =

d. 4 x 998

Exercice 2 ____ / 4 pts

1. **Calculer le nombre de petits cubes à chaque étape ci-dessous (étape 1 à 3).**
2. **Combien de petits cubes contient la figure à l'étape 20 ?**
3. **Trouve une formule afin de calculer le nombre de petits cubes pour n'importe quelle étape.**



Exercice 3 ____ / 4 pts

Voici un programme de calcul :

- **Choisir un nombre entier positif**
- **Doubler le**
- **Ajouter 5**
- **Doubler**
- **Retirer le triple du nombre de départ**
- **Retirer 10**
- **Ecrire le résultat**

1. **Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix**
2. **Quelle conjecture peut-on formuler ?**
3. **Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.**

Exercice 4 ____ / 4 pts

Voici un programme de calcul :

- **Choisir 3 entiers consécutifs (qui se suivent en ordre croissant)**
- **Calculer leur somme**

1. **Appliquer ce programme avec quelques nombres de ton choix**
2. **Quelle conjecture peut-on formuler ?**
3. **Prouve que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ.**

Barème

Activité 3	1. Essai	2. Conjecture	3. Généralisation	4. Distributivité	5. Equivalence
Point :	0.5 pour 1 essai 1 dès 2 essais	0.5 pour une conjecture juste	1 pour la formule $(n\cdot 2+5)\cdot 2-n\cdot 3-10$	1 pour son usage correct	0.5 pour l'obtention d'un équivalence juste

Activité 4	1. Essai	2. Conjecture	3. Généralisation	4. Distributivité
Points	0.5pts pour 1 essai et 1pt dès 2 essais	0.5pt pour un multiple de 3. 1pt pour 3 fois l'entier du milieu.	1pt pour la formule n + n+1 +n +2	1pt pour son usage correct